

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДОНБАСЬКА ДЕРЖАВНА МАШИНОБУДІВНА АКАДЕМІЯ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ
з дисципліни
**«Створення дослідницьких систем для фізичного моделювання процесів
у вузлах машин та обладнання»**

ТЕМА 1

1. Методологія та основні поняття наукових досліджень

При дослідженні технічних систем можуть використовуватися теоретичні та емпіричні методи. Кожен з цих напрямків володіє відносною самостійністю, має свої переваги та недоліки. У загальному випадку, теоретичні методи у вигляді математичних моделей дозволяють описувати і пояснювати взаємозв'язки елементів системи або об'єкта, що вивчається, у відносно широких діапазонах зміни змінних величин. Проте за побудові теоретичних моделей неминуче запровадження будь-яких обмежень, припущень, гіпотез тощо. Тому виникає завдання оцінки достовірності (адекватності) отриманої моделі реальному процесу чи об'єкту. І тому проводиться експериментальна перевірка розроблених теоретичних моделей. Практика є вирішальною основою наукового пізнання. У ряді випадків саме результати експериментальних досліджень дають поштовх до теоретичного узагальнення явища, що вивчається. Експериментальне дослідження дає більш точну відповідність між параметрами, що вивчаються. Не слід і перебільшувати результати експериментальних досліджень, які справедливі лише межах умов проведеного експерименту.

Таким чином, теоретичні та експериментальні дослідження доповнюють один одного і є складовими елементами процесу пізнання навколишнього світу.

Як правило, результати експериментальних досліджень потребують певної математичної обробки. В даний час процедура обробки експериментальних даних досить добре формалізована і досліднику необхідно лише правильно її використовувати. Коло питань, вирішуваних під час обробки результатів експерименту, негаразд велике. Це питання підбору емпіричних формул та оцінка їх параметрів, питання оцінки істинних значень вимірюваних величин і точності вимірювань, питання дослідження кореляційних залежностей та деякі інші.

2. Актуальність науково-технічних завдань

На підставі аналізу літератури, присвяченої науковому дослідженню, для запобігання перерахованих вище помилок у своїй роботі слід дотримуватися наступних рекомендацій:

1. Висвітлення актуальності має бути багатослівним. Починати її характеристику здалеку не потрібно.

2. У стислому викладі показується, які завдання стоять в аспекті обраного напрямку в сучасних умовах розвитку суспільства. Таким чином актуальні дослідження, теми яких у певних аспектах вивчені не повною мірою, і проведене дослідження спрямовано на подолання цієї прогалини.

3. Слід зробити короткий огляд передумов для дослідження: що зроблено попередниками, і що залишилось нерозкритим, що слід зробити (вказати авторів, що займались даною проблемою).

4. Слід сформулювати протиріччя. *``Протиріччя - це взаємодія між взаємовиключними, але при цьому взаємозумовлюючими та взаємопроникними одне в одне протилежностями всередині єдиного об'єкту та його станів``*. Як відомо протиріччя (наукове) - це найважливіша логічна форма розвитку наукового пізнання. Наукові теорії розвиваються в результаті розкриття та вирішення протиріч, що виявляються в попередніх теоріях або в практичній діяльності людей.

5. Наступний логічний крок дослідження – формулювання проблеми. Не всяка суперечність у практиці може вирішуватися засобами науки - вона може бути обумовлена матеріальними, кадровими труднощами, відсутністю необхідного обладнання тощо. Більше того, наука і не дозволяє протиріч у практиці, а тільки створює передумови для їх вирішення, показує способи їх вирішення, які, до речі, можуть згодом не бути реалізовані з різних причин.

Слово проблема використовується у двох сенсах. У широкій, загальноживаній мові - як синонім слова "завдання", "перешкода" і т.п. У науковому ж сенсі, *``проблема – це питання або цілий комплекс питань, що об'єктивно виникає в ході наукового пізнання, рішення яких представляє істотний практичний або теоретичний інтерес``*. В цьому сенсі проблема виступає як усвідомлення, констатація недостатності досягнутого на даний момент рівня знань, що є або наслідком відкриття нових фактів, зв'язків, законів, виявлення логічних вад існуючих теорій, або наслідком появи нових запитів освітньої практики, які вимагають виходу за межі вже отриманих знань, руху до нових наукових знань.

Таким чином, проблема дослідження логічно впливає із встановленої суперечності. З нього вичленовано те, що має відношення тільки до науки і переведено в площину пізнання, сформульовано мовою науки.

Перш ніж перейти до аналізу наукової проблеми, повторюємо зроблений ранній висновок: виявлення протиріч у знаннях про конкретний предмет не є самоціллю, це необхідно лише для того, щоб зробити наступний важливий крок наукової роботи – поставити проблему.

Наукова проблема - це важке питання, на яке не можна відповісти, не отримавши нового знання про предмет дослідження. Із цього приводу дуже образно висловився І.В. Гете: *`` Говорять, що посередині між двома протилежними думками лежить істина. Ні в якому разі! Між ними лежить проблема ``*.

3. Планування експериментальних досліджень

Експеримент як наукове дослідження - це форма, в якій і за допомогою якої наука існує та розвивається. Експеримент вимагає ретельної підготовки перед його проведенням. У дослідженнях планування експериментальної

частини дослідження має особливо велике значення через широку варіабельність властивостей. Ця особливість є основною причиною труднощів при інтерпретації результатів, які можуть відрізнятися від досвіду до досвіду.

Статистичні проблеми обґрунтовують необхідність вибору такої схеми експерименту, яка б мінімізувала вплив варіабельності на висновки вченого. Тому мета планування експерименту полягає у створенні схеми, яка необхідна для отримання якомога більшої інформації за найменших витрат для виконання дослідження. Більш точно планування експерименту можна визначити як процедуру вибору числа та умов проведення дослідів, необхідних та достатніх для вирішення поставленого завдання з необхідною точністю.

Планування експерименту пов'язане з ім'ям англійського статистика та біолога сера Рональда Ейлмера Фішера. На початку ХХ століття на агробіологічній станції в Ротамстеді (Велика Британія) почалися дослідження впливу добрив на врожайність різних сортів зернових. Вчені змушені були зважати як на велику мінливість об'єктів дослідження, так і на велику тривалість дослідів (близько року). У цих умовах не було іншого шляху, крім розробки продуманого плану експерименту зменшення негативного впливу зазначених чинників на точність висновків. Застосувавши статистичні знання до біологічних проблем, Фішер прийшов до розробки власних принципів теорії статистичного висновку та започаткував нову науку про планування та аналіз експериментів.

Сам Рональд Фішер пояснював основи планування на прикладі експерименту, зробленого для з'ясування здатності якоїсь англійської леді розрізняти, що було налито в чашку насамперед - чай чи молоко.

Експеримент проходить просто: леді пробує чай з молоком і до смаку намагається зрозуміти, в якій черговості були налиті обидва інгредієнти. План, розроблений при цьому дослідженні, характеризується низкою властивостей.

Порівняння. У багатьох дослідженнях точне визначення результату виміру важко чи неможливе. Так, наприклад, леді не зможе кількісно оцінити якість чаю, вона порівнюватиме його з еталоном правильно приготовленого напою, смак якого знайомий їй з дитинства. Як правило, у науковому експерименті об'єкт порівнюється або з деяким заздалегідь заданим стандартом, або з контрольним об'єктом.

Рандомізація. Це дуже важливий момент у плануванні. У нашому прикладі рандомізація стосується того, в якому порядку подавати чашки на дегустацію. Рандомізація необхідна для того, щоб стало можливим застосування статистичних методів для аналізу результатів дослідження.

Реплікація. Повторюваність – це необхідний компонент постановки експерименту. Неприпустимо робити висновки про здатність до визначення якості чаю лише по одній чашці. Результат кожного окремого виміру (дегустації) несе у собі частку невизначеності, що виникла під впливом безлічі випадкових факторів. Отже, виявлення джерела варіабельності необхідно провести кілька випробувань. З цією властивістю пов'язана чутливість

експерименту. Фішер зазначав, що доки кількість чашок чаю не перевищить деякого мінімуму, неможливо зробити будь-які однозначні висновки.

Однорідність. Незважаючи на необхідність повторення вимірів (реплікація), їх кількість не повинна бути надто великою, щоб не втратилася однорідність. Різниця температур чашок, притуплення смаку тощо при перевищенні деякого граничного числа повторень можуть ускладнити аналіз результатів експерименту.

Стратифікація. Виходячи за рамки прикладу Р. Фішера до більш абстрактного опису експериментального плану, можна додатково вказати таку властивість як стратифікація (блокування). Стратифікація - це розподіл експериментальних одиниць відносно однорідні групи (блоки, шари). Процедура стратифікації дозволяє мінімізувати ефект відомих невідповідних джерел варіабельності. В середині кожного блоку помилку експерименту припускають меншою щодо варіанта з випадковим відбором для експерименту такої ж кількості об'єктів.

Описані вище характеристики експериментального плану повністю або частково відносяться до будь-якого наукового експерименту. Однак для початку роботи недостатньо одного лише знання про загальні властивості дослідження, необхідна ретельніша підготовка.

Будь-яке дослідження починається із постановки мети. Вибір проблеми для вивчення та її формулювання вплинуть як на дизайн дослідження, так і на висновки, які будуть зроблені за його результатами. У найпростішому випадку формулювання проблеми має припускати питання «Хто?», «Що?», «Коли?», «Чому?» і «Як?».

Як ілюстрацію важливості цього етапу планування можна навести дослідження, у якому проводиться збір інформації про поломки вузлів устаткування. Залежно від постановки мети, робота може бути спрямована на розробку нової конструкції обладнання чи нової технології виробничого процесу. Незважаючи на те, що використовується один і той же набір даних, постановка задачі та висновки суттєво різняться залежно від формулювання проблеми.

Після вибору мети роботи слід визначити, так звані залежні змінні. Це змінні, які вимірюватимуться під час проведення дослідження. Наприклад, показники функціонування тих чи інших систем, а також будь-які характеристики об'єктів дослідження, зміна яких буде для нас інформативною.

Оскільки є залежні змінні, то мають бути ще й незалежні змінні. Інша їхня назва – фактори. Чинниками дослідник оперує в експерименті. Взаємозв'язок між фактором і залежною змінною зручно представляти за допомогою кібернетичної системи, яка часто називається «чорна скринька».

Чорна скринька – це система, механізм роботи якої нам невідомий. Однак дослідник має інформацію про те, що відбувається на вході та виході чорної скриньки. При цьому стан виходу функціонально залежить від стану входу. Відповідно u_1, u_2, \dots, u_p – це залежні змінні, величина яких залежить від факторів (незалежних змінних x_1, x_2, \dots, x_k). Параметри

w_1, w_2, \dots, w_n представляють собою збурюючі впливи, що не піддаються контролю або змінюються з часом.

Загалом це можна записати так: $y=f(x_1, x_2, \dots, x_k)$.

Кожен фактор у дослідженні може набувати одного з кількох значень. Такі значення називають рівнями фактора. Може виявитися, що фактор здатний набувати нескінченну кількість значень, проте на практиці вибирається кілька дискретних рівнів, кількість яких залежить від завдань конкретного досвіду.

Фіксований набір рівнів факторів визначає один із можливих станів чорної скриньки. Водночас це є умови проведення одного з можливих дослідів. Якщо перебрати всі можливі набори таких станів, то ми отримаємо безліч різних станів даної системи, кількість яких буде числом всіх можливих експериментів. Для того, щоб обчислити кількість можливих станів, достатньо число рівнів факторів q (якщо для всіх факторів воно є однаковим) звести у ступень кількості факторів k .

$$N=q^k$$

Сукупність всіх можливих станів визначає складність чорної скриньки. Так, система із десяти факторів на чотирьох рівнях може перебувати більш ніж у мільйоні різних станів. Очевидно, що у подібних випадках неможливо провести дослідження, що включає всі можливі досліди. Тому на етапі планування вирішується питання про те, скільки дослідів та яких саме необхідно провести для вирішення поставленого завдання.

Слід зазначити, що властивості об'єкта дослідження мають важливе значення для експерименту. По-перше, нам треба мати інформацію про рівень відтворюваності результатів дослідів з даним об'єктом. Для цього можна провести експеримент, а потім повторити його через нерівні проміжки часу та порівняти результати. Якщо розкид значень не перевищує наших вимог до точності експерименту, об'єкт задовольняє вимогу відтворюваності результатів. Інша вимога до об'єкта – його керованість. Керованим вважається об'єкт, у якому можна провести активний експеримент. У свою чергу, активний експеримент - це такий експеримент, у процесі якого дослідник має можливість вибору рівнів факторів, що становлять для нього інтерес.

Насправді немає повністю керованих об'єктів. Як мовилося раніше вище, реальний об'єкт діють як керовані, і некеровані чинники, що зумовлює варіабельності результатів між окремими об'єктами. Відокремити випадкові зміни від закономірних, викликаних різними рівнями незалежних змінних, ми можемо лише за допомогою статистичних методів.

Але статистичні методи ефективні лише за певних умов. Одна з таких умов - це вимога певного мінімального розміру вибірок, які у проведенні експерименту. Очевидно, що чим ширший діапазон зміни ознак від об'єкта до об'єкта, тим більше має бути повторність досвіду, тобто чисельність експериментальних груп.

Оскільки невиправдано велика кількість випробувань зробить дослідження занадто дорогим, а недостатній обсяг вибірки може поставити під сумнів точність висновків, визначення необхідного обсягу вибірок грає

вирішальну роль у плануванні експерименту. Проте слід згадати, що вони вимагають попереднього визначення середньої величини досліджуваного показника та її помилки.

Наступний етап у плануванні експериментів – це рандомізація. Рандомізація являє собою процес, що використовується для групування об'єктів таким чином, щоб у кожного з них була рівна ймовірність потрапити в контрольну або дослідну групу. Іншими словами, вибір учасників дослідження має відбуватися випадково, щоб дослідження не було відхилено у бік «переважного» для дослідника результату.

Рандомізація допомагає запобігти зміщенням, зумовленим причинами, які не були безпосередньо враховані в плані експерименту. Однак повна рандомізація можлива далеко не завжди. Крім того, обмежують рандомізацію так звані «блокові» плани експериментів. Ці плани мають на увазі, що відбір у кожен блок виконується відповідно до певних невідповідних умов, а випадковий відбір об'єктів дослідження можливий лише всередині блоків. Процес рандомізації легко здійснити за допомогою спеціалізованого статистичного програмного забезпечення або спеціальних таблиць.

4 . Обробка результатів досліджень та визначення помилок

Спостереження - це систематичне, цілеспрямоване сприйняття того чи іншого об'єкта або явища без впливу на об'єкт, що вивчається, або явище. Спостереження дозволяє отримати початкову інформацію щодо об'єкта, що вивчається, або явища.

Експеримент – метод вивчення об'єкта, коли дослідник активно та цілеспрямовано впливає на нього шляхом створення штучних умов або використовує природні умови, необхідні для виявлення відповідних властивостей. Перевагами експерименту проти спостереженням реального явища чи об'єкта є:

1. Можливість вивчення у «чистому вигляді», без впливу побічних факторів, що затемнюють основний процес;
2. В експериментальних умовах можна отримати результат швидше і точно;
3. При експерименті можна проводити випробування стільки разів, скільки це необхідно.

Результат експерименту чи виміру завжди містить певну похибку. Якщо похибка мала, то нею можна знехтувати. Однак при цьому неминуче виникають два питання: по-перше, що розуміти під малою похибкою, і по-друге, як оцінити величину похибки. Тобто, і результати експерименту потребують певного теоретичного осмислення.

Цілі математичної обробки результатів експерименту

Метою будь-якого експерименту є визначення якісного та кількісного зв'язку між досліджуваними параметрами, або оцінка чисельного значення будь-якого параметра.

У деяких випадках вид залежності між змінними величинами відомий за наслідками теоретичних досліджень. Як правило, формули, що виражають ці залежності, містять деякі постійні, значення яких необхідно визначити з досвіду.

Іншим типом завдання є визначення невідомого функціонального зв'язку між змінними величинами на основі даних експерименту. Такі залежності називають емпіричними.

Однозначно визначити невідому функціональну залежність між змінними неможливо навіть у тому випадку, якби результати експерименту не мали помилок. Тим більше не слід очікувати, маючи результати експерименту, що містять різні помилки вимірювання.

Тому слід чітко розуміти, що метою математичної обробки результатів експерименту є не знаходження істинного характеру залежності між змінними чи абсолютної величини будь-якої константи, а подання результатів спостережень у вигляді найпростішої формули з оцінкою можливої похибки її використання.

Види вимірювань та причини помилок

Під виміром розуміють порівняння вимірюваної величини з іншою величиною, прийнятою за одиницю виміру.

Розрізняють два типи вимірів: прямі та непрямі. При прямому вимірі вимірювана величина порівнюється безпосередньо зі своєю одиницею міри. Наприклад, вимірювання мікрометром лінійного розміру, проміжку часу за допомогою годинникових механізмів, температури термометром, сили струму амперметром і т.п. Значення вимірюваної величини відраховується при цьому за відповідною шкалою приладу.

При непряму вимірі вимірювана величина визначається (обчислюється) за результатами вимірювань інших величин, пов'язані з величиною, що вимірюється певною функціональною залежністю. Наприклад, вимірювання швидкості пройденим шляхом і витраченого часу, вимірювання щільності тіла за вимірюванням маси та об'єму, температури при різанні по електрорушійній силі, величини сили за пружними деформаціями тощо.

При вимірі будь-якої фізичної величини проводять перевірку та встановлення відповідного приладу, спостереження їх показань та відлік. При цьому ніколи справжнього значення вимірюваної величини не одержати. Це пояснюється тим, що вимірювальні засоби засновані на певному методі вимірювання, точність якого кінцева. При виготовленні приладу визначається клас точності. Його похибка визначається точністю поділів шкали приладу. Якщо вимірювальна шкала нанесена через 1 мм, то точність відліку $\pm 0,5$ мм

не змінити, якщо застосуємо лупу для розглядання шкали. Аналогічно відбувається вимірювання та при використанні інших вимірювальних засобів.

Крім приладової похибки на результат вимірювання впливає ще ряд об'єктивних та суб'єктивних причин, що зумовлюють появу помилки вимірювання – різниці між результатом вимірювання та дійсним значенням вимірюваної величини. Помилка виміру зазвичай невідома, як невідомо і справжнє значення вимірюваної величини. Виняток становлять вимірювання відомих величин щодо точності вимірювальних приладів або їх тарировке. Тому одним з найважливіших завдань математичної обробки результатів експерименту є оцінка істинного значення вимірюваної величини за даними експерименту з можливо меншою помилкою.

Типи помилок виміру

Крім приладової похибки виміру (визначуваної методом виміру) існують й інші, які можна розділити на три типи:

1. Систематичні похибки зумовлюються чинниками, що постійно діють. Наприклад, усунення початкової точки відліку, вплив нагрівання тіл на їх подовження, знос різального леза і т.п. Систематичні помилки виявляють при відповідному таруванні приладів і тому можуть бути враховані при обробці результатів вимірювань.

2. Випадкові помилки містять у своїй основі багато різних причин, кожна з яких не виявляє себе чітко. Випадкову помилку можна як сумарний ефект дії багатьох чинників. Тому випадкові помилки при багаторазових вимірах виходять різними як за величиною, і за знаком. Їх неможливо врахувати як систематичні, але можна врахувати їх впливом геть оцінку істинного значення вимірюваної величини. Аналіз випадкових помилок є найважливішим розділом математичної обробки експериментальних даних.

3. Грубі помилки (промахи) з'являються внаслідок неправильного відліку за шкалою, неправильного запису, неправильної установки умов експерименту тощо. Вони легко виявляються при повторному проведенні дослідів.

Надалі вважатимемо, що систематичні та грубі помилки з результатів експерименту виключені.

Властивості випадкових помилок

Випадкові помилки бувають як позитивні, так і негативні різної величини, що не перевищує певної межі. Якщо позначити через X істинне значення вимірюваної величини, а результат першого вимірювання – a_1 , то різницю:

$$X - a_1 = x_1 \quad \text{або} \quad a_1 - X = x_1$$

називають істинною абсолютною помилкою одного виміру. Одночасно вона є випадковою (за винятком систематичних та грубих помилок).

Якщо вимірювання провести багаторазово в тих самих умовах, то результати окремих вимірювань однаково надійні. Таку сукупність вимірювань $a_1, a_2 \dots a_n$ називають рівноточними вимірюваннями. Якщо проаналізувати досить велику серію рівноточних вимірювань та відповідних випадкових помилок вимірювань, то можна виділити 4 властивості випадкових помилок:

1. Число позитивних помилок майже дорівнює числу негативних;
2. Дрібні помилки трапляються частіше, ніж великі;
3. Розмір найбільших помилок вбирається у деякого певного краю, залежить від точності виміру. Найбільшу помилку у ряді рівноточних вимірів називають граничною помилкою;
4. Приватні від розподілу алгебраїчної суми всіх випадкових помилок з їхньої загальне близько нуля, тобто:

$$\frac{\tilde{o}_1 + \tilde{o}_2 + \dots + \tilde{o}_n}{n} \approx 0.$$

На основі зазначених властивостей при врахуванні деяких припущень математично досить суворо виводиться закон розподілу помилок, який описує наступна функція:

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}},$$

де σ – дисперсія вимірювань;

e – основа натуральних логарифмів;

x – істинна абсолютна похибка вимірювань.

Інакше цю залежність називають формулою випадкових помилок, формулою Гаусса.

Закон розподілу випадкових помилок є основним у математичній теорії похибок. Інакше його називають нормальним законом розподілу. Особливе значення на користь широкого використання закону Гауса має таку обставину: якщо сумарна помилка виміру з'являється в результаті спільної дії ряду причин, кожна з яких вносить малу частку в загальну помилку (тобто немає домінуючих причин), то за яким би законом не були розподілені помилки, що викликаються кожною з причин, результат їхньої спільної дії призведе до нормального розподілу помилок. Ця закономірність є наслідком так званої центральної граничної теореми Ляпунова і добре співвідноситься з поняттям випадкової помилки.

Поряд із нормальним законом розподілу помилок можуть зустрічатися й інші.

Найбільш ймовірне значення вимірюваної величини

Припустимо, що для визначення істинного значення X вимірюваної величини було зроблено n рівноточних вимірювань з результатами $a_1, a_2 \dots a_n$. Звісно, що ряд цих чисел буде більше X , інші менше X і неясно, яке з цих чисел ближче всього підходить до X .

Подаємо результати вимірювань у вигляді очевидних рівностей:

$$a_1 = X - \Delta x_1; a_2 = X - \Delta x_2; \dots; a_n = X - \Delta x_n.$$

Звісно, що істинні абсолютні помилки Δx_i можуть приймати як позитивні, так і негативні значення.

Підсумовуючи ліві та праві сторони рівностей отримаємо:

$$\sum_{i=1}^n a_i = nX - \sum_{i=1}^n \Delta x_i.$$

Поділимо обидві частини рівності на кількість вимірів n та одержимо:

$$\bar{O} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} + \frac{\sum_{i=1}^n \Delta x_i}{n}.$$

Величина $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$ є середньоарифметичним значенням величини X .

Якщо число n є достатньо великим (при $n \rightarrow \infty$), то згідно з четвертою властивістю випадкових помилок:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta x_i = 0.$$

З викладеного випливає, що:

$$X = a \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

тобто, при нескінченному числі вимірів справжнє значення вимірюваної величини дорівнює середньоарифметичному значенню результатів всіх вимірів. При обмеженій кількості вимірювань справжнє значення відрізнятиметься від середньоарифметичного та необхідно оцінити величину цієї розбіжності: $X = a \pm \Delta x$.

Слід ще раз наголосити, що середньоарифметичне значення, що приймається за справжнє значення вимірюваної величини, є найімовірнішим значенням. Серед значень a_i можуть опинитися значення, які у дійсності ближче до справжнього значення.

Відхилення Δx найімовірнішого значення a від його справжнього значення X називають справжньою абсолютною помилкою.

Оцінка точності вимірювань

Для ряду рівноточних вимірів $a_1, a_2 \dots a_n$ визначимо його середньоарифметичне значення a і складемо різниці $(a - a_1), (a - a_2), \dots, (a - a_n)$.

Кожну з цих різниць називають імовірною помилкою окремого виміру (V_i). Найімовірніші помилки, як і справжні помилки $\Delta x_i = (X - a_i)$, бувають позитивні та негативні, нульові. Розглянемо

$$\sum_{i=1}^n V_i = V_1 + V_2 + \dots + V_n = na - (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = 0, \quad \text{тобто}$$

алгебраїчна сума найімовірніших помилок дорівнює нулю за будь-якої кількості вимірювань. Справжні випадкові помилки такою властивістю не мають.

Ймовірні помилки V_i лежать в основі математичної обробки результатів вимірювань: саме за ними обчислюють граничну абсолютну помилку Δa ; середньоарифметичного a і тим самим оцінюють точність результату вимірів.

Середня справжня випадкова помилка (інакше – середнє відхилення окремого виміру) визначається виразом $(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_n)/n$.

Величина $[(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + \dots + (\Delta x_n)^2]/n$ представляє середній квадрат випадкової помилки чи дисперсію S^2 вибірки (при обмеженому n) або генеральної сукупності σ^2 (при нескінченному n). Середня квадратична

помилка окремого виміру $S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2}{n}}$ є найкращим критерієм точності,

ніж середня випадкова помилка, т.к. не відбувається компенсації позитивних та негативних помилок Δx_i і сильніше враховується дія великих помилок.

Оскільки справжнє значення X вимірюваної величини невідоме, то невідомі і випадкові помилки Δx_i . Для визначення середньої квадратичної помилки S використовується положення теорії випадкових помилок, що при великій кількості вимірів n справедлива рівність:

$$S = \sqrt{\frac{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + \dots + (\Delta x_n)^2}{n}} = \sqrt{\frac{V_1^2 + V_2^2 + \dots + V_n^2}{n - 1}}.$$

Різний знаменник пояснюється тим, що величини Δx_i є незалежними, а з n величин V_i незалежними є $n-1$, т.я. до величини V_i входить a , що визначається з цих же n вимірювань.

Важливо, що не знаючи справжніх випадкових помилок вдається обчислити середню квадратичну помилку певного виміру:

$$S = \pm \sqrt{\frac{V_1^2 + V_2^2 + \dots + V_n^2}{n-1}}.$$

Оцінимо тепер похибку результату всієї серії експерименту, тобто визначимо величину $\Delta x = X - a$.

Для цього проведемо перетворення виразу

$$\begin{aligned} S_n^2 &= \frac{\sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X - a_i)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X - a + a - a_i)^2 = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\Delta x + V_i)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\Delta x)^2 + \frac{2\Delta x}{n} \sum_{i=1}^n V_i + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V_i^2 = \\ &= (\Delta x)^2 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V_i^2, \text{ò.à. } S_n^2 = (\Delta x)^2 + \frac{n-1}{n} S^2. \end{aligned}$$

Якщо повторити серії по n вимірювань в кожній N раз, можна одержати середні значення a_1, a_2, \dots, a_N та похибки результатів вимірювань

$$(\Delta x)_1 = (X - a_1); (\Delta x)_2 = (X - a_2); \dots; (\Delta x)_N = (X - a_N)$$

та середню середньоквадратичну похибку серії

$$S_a^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\Delta x)_i^2 = (\Delta x)_i^2.$$

При великому числі N $S_a^2 \rightarrow \sigma_a^2$

$$\sigma_a^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} S_a^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\Delta x)_i^2.$$

Усреднюючи вираз S_n^2 за числом серій N , одержимо

$$S_a^2 = (\Delta x)^2 = S_n^2 - \frac{n-1}{n} S^2.$$

Враховуючи, що при великому n $S_n^2 \rightarrow \sigma^2$ і $S^2 \rightarrow \sigma^2$ отримуємо шуканий зв'язок між дисперсіями всього досліджу σ_a^2 та окремого експерименту σ^2

$$\sigma_a^2 = \sigma^2 - \frac{n-1}{n} \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n},$$

тобто дисперсія σ_a^2 результату серії з n вимірювань у n разів менша дисперсії окремого вимірювання. При обмеженому числі n вимірів наближеним виразом σ_a^2 буде S_a^2

$$S_a^2 = \frac{S^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n V_i^2}{n(n-1)}.$$

Вирази σ_a^2 і S_a^2 відображають фундаментальний закон зростання точності при зростанні числа спостережень. З нього випливає, що бажаючи підвищити точність вимірів у 2 рази ми маємо зробити замість одного - чотири виміри; щоб підвищити точність у 3 рази, потрібно збільшити кількість вимірювань у 9 разів тощо.

Поняття довірчого інтервалу та довірчої ймовірності

Як встановлено раніше, дійсне значення вимірюваної величини X відрізняється від середньоарифметичного a на певну величину Δx .

Випадкові величини a_1, a_2, a_3 зумовляють випадковий характер абсолютної похибки Δx результату серії вимірювань, яка буде розподілена згідно із законом Гауса:

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_a} e^{-\frac{(\Delta x)^2}{2\sigma_a^2}}.$$

Тоді замість виразу $X = a \pm \Delta x$ можна записати $a - \Delta x \leq X \leq a + \Delta$.

Інтервал $(a - \Delta x; a + \Delta x)$, до якого за визначенням потрапляє справжнє значення X називають довірчим інтервалом. Надійністю (рівнем значимості) результату серії вимірювань називається ймовірність того, що справжнє значення X вимірюваної величини потрапить у довірчий інтервал. Ймовірність α виражається у частках одиниці або відсотках. Графічно надійність відбивається площею під кривою нормального розподілу межах довірчого інтервалу, віднесеної до загальної площі. Вибір надійності визначається характером вироблених вимірів. Наприклад, до деталей літака пред'являються більш жорсткі вимоги, ніж до мотора човна, а до останнього значно більше, ніж до ручної тачки. При звичайних вимірах обмежуються довірчою ймовірністю 0,90 або 0,95. Для будь-якої величини довірчого інтервалу (вираженого у частках σ) за формулою Гауса може бути прорахована відповідна довірна ймовірність. Ці обчислення зроблені і зведені в таблицю, що є практично у всій літературі з теорії ймовірності.

Величина абсолютної похибки Δx може бути представлена у вигляді $K \cdot \sigma_a$, де K деякий чисельний коефіцієнт, що залежить від надійності α . Однак це справедливо лише для великого нескінченного числа n . При малих n цим коефіцієнтом користуватися не можна, так як величина σ_a невідома. Щоб отримати оцінки меж довірчого інтервалу при малому n вводиться новий коефіцієнт t_α . Цей коефіцієнт запропонований англійським математиком та

хіміком В.С. Госсетом, що публікував свої роботи під псевдонімом "Стьюдент".

І коефіцієнт t_α назвали коефіцієнтом Стьюдента. Коефіцієнт Стьюдента відбиває розподіл випадкової величини $t = \frac{\Delta\bar{d}}{S_a}$ при різному n . При $n \rightarrow \infty$

(практично при $n \geq 20$) розподіл Стьюдента перетворюється на нормальний розподіл. Значення коефіцієнта Стьюдента також наводяться практично у всій літературі з теорії ймовірності.

Знаючи величину t_α можна визначити величину абсолютної похибки $\Delta x = t \cdot S_a$. Слід зазначити, що величина абсолютної похибки ще визначає точність вимірів. Точність вимірів характеризує відносна похибка, що дорівнює відношенню абсолютної похибки Δx результату вимірів до результату вимірів a : $e = \pm \Delta x / a$.

Виявлення промахів

Якщо в ряді вимірів зустрічаються результати, що різко відрізняються від більшої частини ряду, то виникає питання належності значень цього ряду вимірів. Великі помилки мають малу ймовірність виникнення. Тому слід об'єктивно оцінити, чи є даний вимір промахом (тоді його виключають із ряду) чи це результат випадкового, але цілком закономірного відхилення. Можна вважати кожен вимір промахом, якщо ймовірність випадкової появи такого значення є досить малою.

Якщо відомо точне значення σ , то ймовірність появи значення, що відрізняється від середньоарифметичного a більше ніж на $3\sigma \leq 0,003$ і всі виміри, відмінні від a на 3σ (і більше) можуть бути відкинуті, як малоймовірні.

Слід пам'ятати, що з сукупності вимірів ймовірність появи виміру $\geq 3\sigma$ від a завжди більше $0,003$. Справді, ймовірність того, що результат кожного виміру не відрізнятиметься від істинного більш ніж 3σ складає $1 - 0,003 = 0,997$. Імовірність того, що всі n вимірювань не відрізнятимуться від середнього більш ніж на 3σ за правилом множення ймовірностей складе $(1 - 0,003)^n$. Для не надто великого n

$$(1 - 0,003)^n \approx 1 - 0,003 \cdot n.$$

Це означає, що ймовірність того, що з 10 вимірювань хоча б один випадково відрізнятиметься від середнього більш ніж на 3σ буде вже не $0,003$, а $0,03$ або 3% . А при 100 вимірах ймовірність такої події становитиме вже близько 30% .

Зазвичай кількість вимірів не дуже велика. При цьому точне значення σ не відомо, отже, відкидати виміри, що відрізняються від середнього більш ніж на 3σ , неможна.

Для оцінки імовірності β випадкової появи «вискакуючих» значень у ряді n вимірів складено відповідні таблиці.

Для застосування таблиці обчислюється середнє арифметичне \bar{a} та середня квадратична похибка S_n з усіх вимірювань, включаючи і підозрюване значення a_k . Потім обчислюється ухилення підозрюваного значення a_k від середнього арифметичного у частках середньоквадратичної помилки

$$V_{\text{макс}} = \left| \frac{\bar{a} - a_k}{S_n} \right|.$$

За таблицею визначається якій ймовірності β відповідає одержане значення $V_{\text{макс}}$.

Якщо ймовірність появи даного виміру у ряді лежить у діапазоні $0,1 > \beta > 0,01$, то видається однаково правильним - залишити цей вимір або відкинути. У випадку, коли β виходить за вказані межі, питання про відкидання вирішується практично однозначно. Вирішуючи питання про відкидання корисно подивитися, як сильно воно змінює остаточний результат по a і S_n .

Помилки непрямих вимірів

Часто вимірюється не безпосередньо цікавить нас величина, а інша, що залежить від неї деяким чином. Наприклад, при різанні металів часто безпосередньо вимірюються деформації, ЕРС, за якими судять про сили і температури, що виникають. При цьому також необхідно оцінити помилку виміру.

При непрямих вимірах значення у вимірюваної величини знаходять за деякою формулою

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_m),$$

де x_1, x_2, \dots, x_m – середні арифметичні вимірювані (безпосередньо) величини. Розглянемо функцію загального вигляду

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

де x_1, x_2, \dots, x_m – незалежні змінні, визначення яких виробляються n прямих незалежних вимірів з кожної x_i .

Позначимо значення змінних через середнє значення та відхилення

$$y \pm \Delta y = f(x_1 \pm \Delta x_1, x_2 \pm \Delta x_2, \dots, x_m \pm \Delta x_m).$$

Цю функцію представимо поряд Тейлора, обмеживши його першими членами ряду (приймаючи $\Delta x_i \ll x_i$)

$$y \pm \Delta y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \pm \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 \pm \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \Delta x_m,$$

де

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} - \text{похідна функції по } x_i, \text{ взята у точці } x_i.$$

Враховуючи, що $y = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ одержимо

$$\Delta y = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \Delta x_m.$$

Щоб врахувати похибки Δx_i всіх n дослідів доцільно використовувати середні квадратичні оцінки $(\Delta x_i)^2$, так як $\Delta x_i = 0$.

Зведемо в квадрат ліву та праву частини рівняння та розділимо на n

$$\frac{\sum_{i=1}^n \Delta y^2}{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 \frac{\sum_{i=1}^n (\Delta x_1)^2}{n} + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 \frac{\sum_{i=1}^n (\Delta x_2)^2}{n} + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_m} \right)^2 \frac{\sum_{i=1}^n (\Delta x_m)^2}{n}$$

Тут суми подвоєних творів типу

$$\frac{2 \sum_{i=1}^n \Delta x_k \sum_{i=1}^n \Delta x_{k+1}}{n} = 0$$

згідно з четвертою властивістю випадкових помилок ($\Delta x_i = 0$).

Тоді у лівій та правій частинах маємо середньоквадратичні похибки функції та аргументів

$$S_y^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 S_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 S_{x_2}^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_m} \right)^2 S_{x_m}^2.$$

Приклад. Під час тарування динамометра було отримано рівняння залежності сили від відхилення l променя осцилографа виду $P = 25 l$. Точність вимірювання відхилення $\Delta l = 1$ мм. Тоді

$$\Delta P = \frac{\partial P}{\partial l} \Delta l = 25 \cdot 1 = 25 \text{ ед.}$$

Як міра точності краще виступає не абсолютна, а відносна похибка.

$$e_y = \frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta y}{y}.$$

Розглянемо її визначення з прикладу. Нехай

$$y = c x_1^\alpha \cdot x_2^\beta \cdot x_3^\gamma.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial x_1} &= c \alpha x_1^{\alpha-1} x_2^\beta x_3^\gamma; & \frac{\partial y}{\partial x_2} &= c \beta x_1^\alpha x_2^{\beta-1} x_3^\gamma; \\ \frac{\partial y}{\partial x_3} &= c \gamma x_1^\alpha x_2^\beta x_3^{\gamma-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{y} &= \sqrt{\frac{(c \alpha x_1^{\alpha-1} x_2^\beta x_3^\gamma)^2 (\Delta x_1)^2 + (c \beta x_1^\alpha x_2^{\beta-1} x_3^\gamma)^2 (\Delta x_2)^2 + (c \gamma x_1^\alpha x_2^\beta x_3^{\gamma-1})^2 (\Delta x_3)^2}{(c x_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma)^2}} \\ &= \sqrt{\alpha^2 \frac{(\Delta x_1)^2}{x_1^2} + \beta^2 \frac{(\Delta x_2)^2}{x_2^2} + \gamma^2 \frac{(\Delta x_3)^2}{x_3^2}} = \\ &= \sqrt{\alpha^2 \varepsilon_{x_1}^2 + \beta^2 \varepsilon_{x_2}^2 + \gamma^2 \varepsilon_{x_3}^2}. \end{aligned}$$

Аналогічно можна визначити відносну похибку і за інших залежностей. Знаючи відносну похибку, можна визначити і її абсолютне значення:

$$\Delta y = y \cdot e_y.$$

Правила округлення чисел

Величина похибки результату вимірювань фізичної величини дає уявлення про те, які цифри у числовому значенні вимірюваної величини є сумнівними. Тому результати вимірювань слід округлювати перед тим, як проводити з ними подальші обчислення.

Округлювати числове значення результату вимірювань слід відповідно до числового розряду цифри похибки, що означає. При цьому виконують загальні правила округлення.

Зайві цифри у цілих числах замінюються нулями, а десяткових дробах відкидаються (як і зайві нулі). Наприклад, якщо похибка вимірювання 0,001 мм, то результат 1,07005 округляється до 1,070.

Якщо перша зі змінюваних нулями і цифр, що відкидаються менше 5, цифри, що залишаються, не змінюються. Наприклад, число 148935, точність виміру ± 50 , округлення: 148900.

Якщо перша із замінюваних нулями або цифр, що відкидаються, дорівнює 5, а за нею не слідує жодних цифр або йдуть нулі, то округлення проводиться до найближчого парного числа. Наприклад, число 123,50 округляється до 124.

Якщо перша із замінюваних нулями або цифр, що відкидаються, більше 5 або дорівнює 5, але за нею слідує значна цифра, то остання цифра збільшується на одиницю. Наприклад, число 6783,6 округляється до 6784.

Порядок обробки результатів вимірів

При практичній обробці результатів вимірювань можна послідовно виконати такі операції :

1. Записати результати вимірів;
2. Обчислити середнє значення з n вимірів

$$a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$$

3. Визначити похибки окремих вимірів $V_i = a - a_i$;
4. Обчислити квадрати похибок окремих вимірів V_i^2 ;
5. Якщо кілька вимірів різко відрізняються за своїми значеннями від інших вимірів, слід перевірити чи є промахом. За винятком одного або кількох вимірів п.п.1...4 повторити;
6. Визначається середня квадратична похибка результату серії вимірів

$$S_a = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n V_i^2}{n(n-1)}}$$

7. Задається значення надійності α ;
8. Визначається коефіцієнт Стюдента $t_\alpha(n)$ для обраної надійності α та кількості проведених вимірювань n;
9. Знаходяться межі довірчого інтервалу

$$\Delta x = t_\alpha(n) \cdot S_a$$

10. Якщо величина похибки результату вимірів (п.9) виявиться порівнянною з величиною δ похибки приладу, то як межу довірчого інтервалу слід взяти величину

$$\Delta \tilde{\delta} = \sqrt{t_\alpha^2(n) S_a^2 + \left[\frac{t_\alpha(\infty)}{3} \right]^2 \delta^2}$$

11. Записати остаточний результат

$$X = a \pm \Delta x ;$$

12. Оцінити відносну похибку результату серії вимірів

$$e = \frac{\Delta \bar{a}}{\bar{a}} 100\% .$$

Обробка результатів вимірювання діаметра циліндра

Мікрометром було зроблено десять вимірів діаметра циліндра. Ціна поділу мікрометра 0,01 мм. Визначити діаметр циліндра з надійністю $\alpha = 0,95$ та $\alpha = 0,99$. Оцінити вплив кількості вимірів на точність одержуваного результату.

a_i : 14,85; 14,80; 14,84; 14,81; 14,79;

14,81; 14,80; 14,85; 14,84; 14,80.

1. Для перших п'яти вимірювань визначимо середньоарифметичне значення та межі довірчого інтервалу. Для зручності розрахунків виберемо довільне число a_0 зручне для розрахунків ($a_0 = 14,80$ мм) та визначимо різниці $(a_i - a_0)$ і квадрати цих різниць. Результати зведені до таблиці.

i	a_i , мм	$a_i - a_0$, мм	$(a_i - a_0)^2$, мм ²
1	14, 85	0, 05	0, 0025
2	14, 80	0, 00	0, 0000
3	14, 84	0, 04	0, 0016
4	14, 81	0, 01	0, 0001
5	14, 79	-0, 01	0, 0001
$\sum_{i=1}^5$		0, 09	0, 0043

Знайдемо середнє значення \bar{a} та середньоквадратичне відхилення S_a :

$$\bar{a} = \bar{a}_i + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (a_i - a_0) = 14,80 + \frac{0,09}{5} = 14,818(\text{і і});$$

$$a - a_0 = 0,018 \text{ мм};$$

$$S_a^2 = \frac{1}{n(n-1)} \left[\sum_{i=1}^n (a_i - a_0)^2 - n(a - a_0)^2 \right] = \frac{1}{5 \cdot 4} (0,0043 -$$

$$- 5 \cdot 0,000324) = \frac{27}{20} \cdot 10^{-4} = 1,35 \cdot 10^{-4} \text{ (мм}^2\text{)};$$

$$S_a = \sqrt{1,35 \cdot 10^{-4}} = 1,16 \cdot 10^{-2} \text{ (мм)}.$$

Для надійності $\alpha = 0,95$ і $n = 5$ $t_\alpha = 2,78$. Абсолютна похибка виміру Δx :

$$\Delta x = t_\alpha \cdot S_a = 2,78 \cdot 0,0116 = 0,0322 \text{ мм.}$$

Результат виміру можна подати у вигляді

$$(14,818 - 0,032) \text{ мм} \leq a \leq (14,818 + 0,032) \text{ мм}$$

або зберігаючи у величині похибки одну значну цифру

$$(14,82 - 0,03) \text{ мм} \leq a \leq (14,82 + 0,03) \text{ мм,}$$

тобто $14,79 \text{ мм} \leq a \leq 14,85 \text{ мм}$ або $a = (14,82 \pm 0,03) \text{ мм}$.

Відносна погрішність

$$e_a = \pm \frac{0,03}{14,82} 100\% \approx \pm 0,2\% .$$

Тепер знайдемо абсолютну та відносну похибку цих вимірювань при $\alpha=0,99$.

У цьому випадку $t_\alpha = 4,60$. Тоді

$$\Delta x = t_\alpha \cdot S_a = 4,60 \cdot 1,16 \cdot 10^{-2} = 5,34 \cdot 10^{-2} \text{ (мм)}.$$

Отже $a = (14,82 \pm 0,05) \text{ мм}$

$$e_a = \pm \frac{0,05}{14,82} 100\% \approx \pm 0,3\% .$$

Видно, що зі збільшенням надійності межі довірчого інтервалу зросли, а точність результату зменшилась.

2. Проведемо розрахунок похибок для цих п'яти вимірювань, незаконно вважаючи, що $\sigma^2 = S_n^2$ (що при $n = 5$ помилково). Для цього використовуємо

розподіл Гаусса (а не Стюарта). При $\alpha = 0,95$ $k_\alpha = \frac{\Delta \bar{\sigma}}{S_a} = 1,96$.

Це дає можливість визначити

$$\Delta x = k_\alpha \cdot S_a = 1,96 \cdot 1,16 \cdot 10^{-2} \approx 2 \cdot 10^{-2} \text{ (мм)},$$

тобто похибка вийшла меншою приблизно на 30%. Якщо за цією величиною похибки визначити величину надійності при $t_\alpha = k_\alpha$, то з таблиці коефіцієнтів

Ст'юдента отримаємо $\alpha < 0,90$ замість заданої $\alpha = 0,95$. Отже при малій кількості вимірювань n застосування закону нормального розподілу з $\sigma^2 = S_n^2$ замість розподілу Ст'юдента призводить до зменшення надійності результату вимірів.

3. Знайдемо середні значення та похибки наступних п'яти вимірювань

i	a_i , мм	$a_i - a_0$, мм	$(a_i - a_0)^2$, мм ²
1	14,81	0,01	0,0001
2	14,80	0,00	0
3	14,85	0,05	0,0025
4	14,84	0,04	0,0016
5	14,80	0,00	0
$\sum_{i=1}^5$		0,10	0,0042

$$a_0 = 14,80 \text{ мм};$$

$$a = a_0 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (a_i - a_0) = 14,80 + \frac{0,10}{5} = 14,82 \text{ (мм)};$$

$$a - a_0 = 0,02 \text{ мм};$$

$$S_a^2 = \frac{1}{n(n-1)} \left[\sum_{i=1}^n (a_i - a_0)^2 - n(a - a_0)^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{20} (0,0042 - 5 \cdot 0,0004) = 1,1 \cdot 10^{-4} \text{ (мм}^2\text{)};$$

$$S_a = 1,05 \cdot 10^{-2} \text{ мм.}$$

При $\alpha = 0,95$:

$$\Delta x = t_\alpha \cdot S_a = \pm 2,78 \cdot 1,05 \cdot 10^{-2} = 2,92 \cdot 10^{-2} \text{ (мм)};$$

$$e_a = \frac{\Delta \tilde{a}}{\tilde{a}} 100\% = \pm \frac{0,03}{14,82} 100\% = \pm 0,2\% ;$$

$$X = 14,82 \pm 0,03 \text{ мм.}$$

При $\alpha = 0,99$:

$$\Delta x = \pm 4,60 \cdot 1,05 \cdot 10^{-2} \approx 5 \cdot 10^{-2} \text{ (мм)};$$

$$e_a = \pm \frac{0,05}{14,85} 100\% = \pm 0,3\%;$$

$$X = 14,82 \pm 0,05 \text{ мм.}$$

Результати практично не відрізняються від результатів отриманих з першої серії.

4. Знайдемо тепер похибку результату всієї серії із десяти вимірів. В цьому випадку $\sum (\hat{a}_i - a_o) = 0,19$ (мм); $\sum (\hat{a}_i - a_o)^2 = 0,0085$ (мм²).

Ці величини виходять підсумовуванням останніх рядків із таблиць приватних серій.

$$a_o = 14,80 \text{ мм;}$$

$$a = a_o + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (a_i - a_o) = 14,80 + \frac{1}{10} 0,19 = 14,819 \text{ (мм);}$$

$$a - a_o = 0,019 \text{ мм.}$$

$$S_a^2 = \frac{1}{n(n-1)} \left[\sum_{i=1}^n (a_i - a_o)^2 - n(a - a_o)^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{10 \cdot 9} (0,0085 - 10 \cdot 0,000361) = \frac{49}{90} 10^{-4} = 54 \cdot 10^{-6} \text{ (мм}^2\text{);}$$

$$S_a = 7,35 \cdot 10^{-3} \text{ мм.}$$

При $\alpha = 0,95$ маємо

$$\Delta x = t_\alpha \cdot S_a = \pm 2,26 \cdot 7,35 \cdot 10^{-3} = \pm 1,7 \cdot 10^{-2} \text{ (мм);}$$

$$e_a = \pm \frac{1,7 \cdot 10^{-2}}{14,82} 100\% = \pm 0,11\%;$$

$$a = 14,819 \pm 0,017 \text{ мм.}$$

При $\alpha = 0,99$ одержимо

$$\Delta x = t_\alpha \cdot S_a = \pm 3,25 \cdot 7,35 \cdot 10^{-3} = \pm 2,4 \cdot 10^{-2} \text{ (мм);}$$

$$e_a = \pm \frac{2,4 \cdot 10^{-2}}{14,82} 100\% = \pm 0,16\% ;$$

$$a = 14,819 \pm 0,024 \text{ мм.}$$

Видно, що абсолютна і відносна похибка результату десяти вимірів стали майже вдвічі меншими від похибок п'яти вимірів.

Застосування нормального розподілу з $\sigma^2 = S^2_n$ дає у випадку $\alpha = 0,95$ $k_\alpha = 1,96$ і $\Delta x = 1,4 \cdot 10^{-2}$ мм, а величина надійності знижується до 0,91; у випадку $\alpha = 0,99$ одержимо $k_\alpha = 2,58$ і $\Delta x = 1,9 \cdot 10^{-2}$ мм, а величина надійності знижується до $\alpha = 0,97$.

Як видно, зі зростанням числа вимірювань різницю між результатами, обчисленнями за розподілом Стюдента і за нормальним розподілом зменшується.

Контрольні питання

1. Мета математичної обробки результатів експерименту;
2. Види вимірів;
3. Типи помилок виміру;
4. Властивості випадкових помилок;
5. Чому середньоарифметичне значення випадкової величини за нормального закону її розподілу є найімовірнішим значенням?
6. Що таке справжня абсолютна та найімовірніша помилки окремого виміру?
7. Що таке довірчий інтервал випадкової величини?
8. Що таке рівень значущості (надійності) серії вимірів?
9. Геометричний зміст рівня значимості;
10. Чому за малої кількості дослідів не можна погрішність вимірів уявити як $\Delta x = \pm K\sigma_a$?
11. Що є критерієм "випадковості" великого відхилення вимірюваної величини?
12. Чим визначається величина випадкової помилки непрямих вимірів?
13. Чим визначається точність числового запису випадкової величини?

6. Моделювання як один із найпоширеніших методів досліджень

При характеристиці випадкових величин замало вказати їх можливі значення. Необхідно ще знати, наскільки часто виникають різні значення цієї величини. Це характеризується ймовірністю p окремих її значень.

Співвідношення, що встановлює зв'язок між значеннями випадкової величини та ймовірностями цих значень, називають законом розподілу

випадкової величини. Розрізняють інтегральний та диференціальний закони розподілу.

Види випадкових величин та закони їх розподілу

Під випадковою величиною розуміється величина, яка приймає в результаті досвіду якесь числове або якісне значення.

Випадкова величина, що приймає кінцеве число або послідовність різних значень, називається випадковою дискретною величиною. Випадкова величина, яка набуває всіх значень з деякого інтервалу, називається безперервною випадковою величиною.

Під інтегральним законом розподілу (або функцією розподілу) $F(x)$ випадкової величини X розуміють ймовірність p того, що випадкова величина X не перевищить деякого її значення x

$$F(x) = p(X < x).$$

Основною властивістю інтегрального розподілу є монотонне не спадання в обмеженому діапазоні $[0; 1]$.

Дійсно, якщо x_1 і x_2 деякі значення випадкової величини X . Причому $x_2 > x_1$, то очевидно, що подія $p(X < x_2) \geq p(X < x_1)$, так як між значеннями x_1 і x_2 можуть бути і проміжні. З визначення інтегрального закону випливає, що $F(x_2) \geq F(x_1)$, що свідчить про монотонне не спадання функції. Очевидно також, що

$$F(-\infty) = p(X < -\infty) = 0;$$

$$\Rightarrow F(\infty) - F(-\infty) = 1,$$

$$F(+\infty) = p(X < \infty) = 1;$$

тобто $F(x)$ змінюється в діапазоні від 0 до 1.

Для дискретної випадкової величини

$$F(x) = P(X < x) = P(-\infty < X < x) = \sum_{x_i < x} p_i,$$

де підсумовування поширюється на $x_i < x$. У проміжку між двома послідовними значеннями X функція $F(x)$ є постійною. При переході аргументу x через значення x_i $F(x)$ стрибком зростає на величину $p(X = x_i)$.

Розглянемо $p(x_1 \leq X < x_2)$. Якщо $x_2 > x_1$, то очевидно, що $p(X < x_2) = p(X < x_1) + p(x_1 \leq X < x_2)$.

Тоді

$$p(x_1 \leq X < x_2) = p(X < x_2) - p(X < x_1) = F(x_2) - F(x_1),$$

тобто ймовірність попадання випадкової величини в інтервал $[x_1; x_2)$ дорівнює різниці значень інтегральної функції граничних точок.

Остання умова можна використовувати для знаходження ймовірності $p(X = x_1)$ для безперервної випадкової величини. Для цього розглянемо межу

$$p(X = x_1) = \lim_{x_2 \rightarrow x_1} (x_1 \leq X < x_2) = \lim_{x_2 \rightarrow x_1} [F(x_2) - F(x_1)] = 0,$$

тобто якщо закон розподілу випадкової величини є безперервною функцією, то ймовірність того, що випадкова величина прийме заздалегідь задане значення, дорівнює нулю.

Тут видно різницю між дискретними і безперервними випадковими величинами. Для дискретних випадкових величин для кожного значення випадкової величини існує своя ймовірність. І для нього справедливе твердження: подія, ймовірність якої дорівнює нулю, неможлива. Для безперервної випадкової величини це твердження не так. Як показано, ймовірність того, що $X = x_1$ (де x_1 – заздалегідь обране число) дорівнює нулю, ця подія не є неможливою.

Розглянемо безперервну випадкову величину X , інтегральний закон якої передбачається безперервним та диференційованим. Функцію

$$f(x) = F'(x)$$

називають диференціальним законом розподілу або густиною ймовірності випадкової величини X . З визначення похідної можна записати

$$f(x) = F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{p(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x}$$

тобто щільність ймовірності випадкової величини X у точці x дорівнює межі відношення ймовірності влучення величини X в інтервал $(x; x + \Delta x)$ до Δx , коли Δx прагне до нуля.

Використовуючи поняття інтегральної функції розподілу та певного інтеграла, можна записати

$$f(x) = F'(x) \text{ або } F(x) = p(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx.$$

Якщо $\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$ визначає заштриховану область у відповідних межах,

то

$$p(x < X < x + \Delta x) \approx f(x) \Delta x.$$

З властивостей інтегрального розподілу випливає

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = p(-\infty < X < +\infty) = 1.$$

Знаючи диференціальний закон розподілу, можна визначити інтегральний закон розподілу

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\bar{x}} f(t)dt.$$

Числові характеристики випадкових величин, заданих своїми розподілами

Основними характеристиками випадкової величини, заданої своїми розподілами, є математичне очікування (або середнє значення) та дисперсія.

Математичне очікування випадкової величини є центром її розподілу. Дисперсія характеризує відхилення випадкової величини від середнього значення.

Якщо X дискретна випадкова величина, значення x_i якої приймають із ймовірністю p_i , так, що $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, то математичне очікування $M(X)$ випадкової величини X визначається рівністю

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i = \bar{x},$$

тобто сумою творів всіх її можливих значень на відповідні ймовірності.

Математичним очікуванням безперервної випадкової величини є аналог його дискретного виразу

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \bar{x}.$$

Дійсно, всі значення в інтервалі $(x; x + \Delta x)$ можна вважати приблизно рівними x , а ймовірність таких значень дорівнює $f(x) dx$. Тому значення x_i дискретного розподілу замінюються x , а ймовірності p_i – на $f(x) dx$, а сума замінюється інтегралом.

Дисперсією або розсіюванням випадкової величини X називається математичне очікування квадрата різниці випадкової величини та її математичного очікування.

$$D(X) = M[X - M(X)]^2 = M(X - x)^2 = \sigma^2(x)$$

Якщо випадкова величина X дискретна і набуває значення x_i з імовірностями p_i , то випадкова величина $(X - x)^2$ набуває значення $(x_i - x)^2$ з імовірностями P_i . Тому для дискретної випадкової величини маємо

$$D(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - x)^2 p_i = \sigma^2(x).$$

Аналогічно для безперервної випадкової величини отримуємо

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - x)^2 f(x) dx.$$

Що менше величина дисперсії, то краще значення випадкової величини характеризуються її математичним очікуванням.

Основні дискретні та безперервні закони розподілу

Як зазначалося раніше, дуже часто випадкова величина розподілена за нормальним законом. Але є й інші розподіли, мають практичного значення. Розглянемо деякі з них за умовами виникнення та основними параметрами їх характеризуючими.

1. Рівномірний розподіл ймовірностей.

Нехай щільність ймовірності A дорівнює нулю усюди, крім інтервалу $(a; b)$, на якому вона постійна. Тоді можна записати

$$p(a < X < b) = \int_a^b A \cdot dx = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{b - a}.$$

Тоді диференціальний закон рівномірного розподілу визначається:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ї } \delta\grave{e} \text{ } -\infty < x < a \\ \frac{1}{b - a} & \text{ї } \delta\grave{e} \text{ } a < x < b \\ 0 & \text{ї } \delta\grave{e} \text{ } b < x < \infty \end{cases}$$

Інтегральний закон розподілу

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\bar{0}} f(t) dt = \int_{-\infty}^a f(t) dt + \int_a^x f(t) dt = 0 + \int_a^x \frac{1}{b - a} dt = \frac{x - a}{b - a}.$$

При $x \geq b$ маємо

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^a f(t) dt + \int_a^b f(t) dt + \int_b^x f(t) dt = 0 + \int_a^b \frac{1}{b-a} dt + 0 = 1$$

Таким чином інтегральний закон рівномірного розподілу визначається

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ї дє} \quad -\infty < x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{ї дє} \quad a < x < b \\ 1 & \text{ї дє} \quad b < x < +\infty \end{cases}$$

Основні характеристики розподілу

$$M(X) = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{x^2}{2(b-a)} \Big|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2};$$

$$\begin{aligned} D(X) &= \int_a^b \left[x - \frac{b+a}{2} \right]^2 \frac{dx}{b-a} = \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2(b+a)}{2} - \frac{(b+a)^2 x}{4} \right] \Big|_a^b \\ &= \frac{1}{b-a} \left[\frac{b^3 - a^3}{3} - \frac{(b^2 - a^2)(b+a)}{2} + \frac{(b+a)^2(b-a)}{4} \right] = \\ &= \frac{1}{b-a} \left[\frac{b^3 - a^3}{3} - \frac{(b+a)^2(b-a)}{4} \right] = \frac{1}{b-a} \left[\frac{(b-a)(b^2 + ab + a^2)}{4} - \frac{(b+a)^2(b-a)}{4} \right] = \frac{(b-a)^2}{12}. \end{aligned}$$

2. Біноміальний розподіл

Нехай за деякого випробування подія А може наступити чи відбутися (А). Позначимо ймовірність А через р, а через q=1-p (інших підсумків випробування немає). Тоді результатами двох послідовних незалежних випробувань та їх ймовірністю будуть:

$$AA - p^2; AA - pq; AA - qp; AA - q^2.$$

Звідси видно, що дворазова поява події A дорівнює p^2 , ймовірність одноразової появи – $2pq$, а ймовірність того, що A не настане жодного разу – q^2 . Ці результати єдино можливі і тому

$$\sum_{i=1}^2 p_i = p^2 + 2pq + q^2 = (p + q)^2 = 1.$$

Цю міркування можна перенести на будь-яку кількість випробувань.

Наприклад, при трьох випробуваннях отримаємо

$$\sum_{i=1}^3 p_i = p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3 = (p + q)^3 = 1.$$

Підрахуємо ймовірність того, що за n випробувань подія A з'явиться m разів. Це може статися, наприклад, у послідовності

$$\underbrace{\overset{\cdot}{A}\overset{\cdot}{A}\dots\overset{\cdot}{A}}_m \underbrace{\overset{\cdot}{A}\overset{\cdot}{A}\dots\overset{\cdot}{A}}_{n-m}$$

Зрозуміло, що ймовірність дорівнює $p^m q^{n-m}$. Але m подій може бути і в іншому поєднанні. Число всіх можливих поєднань з n елементів по m (кількість подій A) дорівнює числу поєднань C_n^m . Використовуючи теорему складання ймовірностей, отримуємо загальну ймовірність $P_{m,n}$ настання m подій A з n випробувань

$$\begin{aligned} P_{m,n} &= \tilde{N}_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m} = \\ &= \frac{n(n-1)\dots[n-(m-1)]}{1 \cdot 2 \dots m} p^m q^{n-m}. \end{aligned}$$

З цієї формули видно, що ймовірність $P_{m,n}$ для різного результату випробувань (поява чи поява певного результату A) визначається

$$\frac{p^n}{1 \cdot 2} + \dots + C_n^m p^m q^{n-m} + \dots + np^{n-1}q + q^n = (p + q)^n = 1.$$

Коефіцієнти перед ймовірностями p, q є біноміальними коефіцієнтами, а загальна ймовірність є складовими в розкладанні бінома $(p + q)^n$. Тому закон розподілу випадкової величини X , у якому ймовірність настання подій A визначається коефіцієнтами бінома, називається біноміальним розподілом дискретної випадкової величини. Цей закон може бути поставлений у вигляді таблиці 1.

Таблиця 1
Біноміальний закон розподілу

x_i	0	1	2	...	m	...	n
p_i	q^n	npq^{n-1}	$\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} p^2 q^{n-2}$...	$C_n^m p^m q^{n-m}$...	p^n

Біноміальні коефіцієнти зручно одержувати за допомогою трикутника Паскаля.

1	$n = 0$
1 1	$n = 1$
1 2 1	$n = 2$
1 3 3 1	$n = 3$
1 4 6 4 1	$n = 4$
1 5 10 10 5 1	$n = 5$

Всі рядки трикутника (що починається з одиниці) починаються та закінчуються одиницею. Проміжні числа виходять додаванням сусідніх чисел вищого рядка. Числа, що стоять в одному рядку, є біноміальними коефіцієнтами відповідного ступеня.

З опису біномного розподілу стає ясно, що область його дії там, де можливе багаторазове проведення випробувань з певною ймовірністю.

Визначимо основні характеристики цього розподілу.

Математичне очікування

$$\begin{aligned}
 M(X) &= \sum_{i=1}^n x_i p_i = 0 \cdot q^n + 1 \cdot npq^{n-1} + 2 \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} p^2 q^{n-2} + \dots + \\
 &+ m \frac{n(n-1) \dots [n - (m-1)]}{1 \cdot 2 \dots m} p^m q^{n-m} + \dots + np^n = np \left[q^{n-1} + \right. \\
 &+ \\
 &\left. (n-1)pq^{n-2} + \dots + \frac{(n-1) \dots [n - (m-1)]}{1 \cdot 2 \dots (m-1)} p^{m-1} q^{n-m} + \dots + p^{n-1} \right] = \\
 &= np (q + p)^{n-1} = np.
 \end{aligned}$$

Дисперсія розподілу може бути визначена із загального виразу

$$D(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - x)^2 p_i,$$

але це призводить до громіздких обчислень. У той же час випадкова величина X приймає в кожному досліді лише два значення: 1, якщо подія A відбулася і 0, якщо вона не відбулася з ймовірностями відповідно p або q . Тоді математичне очікування одного досвіду визначиться

$$M(X_1) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p = x$$

і відповідно дисперсія одного досвіду

$$D(X_1) = (0 - p)^2 \cdot q + (1 - p)^2 \cdot p = p^2 q + q^2 p = pq(p + q) = pq.$$

Тоді дисперсія всіх n дослідів становитиме

$$D(X) = n \cdot p \cdot q.$$

3. Закон Пуассона

У разі малих p (або, навпаки, близьких до 1) біноміальний закон розподілу можна перетворити так

$$P_{m,n} = \frac{n(n-1)\dots[n-(m-1)]}{1 \cdot 2 \dots m} p^m q^{n-m} = \frac{n(n-1)\dots[n-(m-1)]}{1 \cdot 2 \dots m} \cdot \left(\frac{\lambda}{n}\right)^m \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-m},$$

де $\frac{\lambda}{n} = p$.

$$P_{m,n} = \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \dots \frac{n-(m-1)}{n} \cdot \frac{\lambda^m}{m!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-m}.$$

Визначимо межі $P_{m,n}$ при $n \rightarrow \infty$ та постійному m . Тоді межі

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right), \dots, \left(1 - \frac{m-1}{n}\right), \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-m} \quad \text{дорівнюють} \quad \text{одиниці,} \quad \text{а}$$

$$\lim \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}.$$

Остаточно маємо

$$P_{m,n} = P_m = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}.$$

Цей розподіл називається законом Пуассона, де λ – інтенсивність розподілу. Використовується у завданнях з рідкісними подіями.

Визначимо його основні характеристики та значення величини λ .

Запишемо закон розподілу у вигляді таблиці.

x_i	0	1	2	...	m	...
p_i	$e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda}{1} e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda}$...	$\frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$...

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i = 0 \cdot e^{-\lambda} + 1 \frac{\lambda}{1} e^{-\lambda} + 2 \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} + \dots +$$

$$+ m \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} + \dots = \lambda e^{-\lambda} \left(1 + \lambda + \frac{\lambda}{2!} + \dots + \frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!} + \dots \right).$$

Вираз у дужках є розкладанням функції e^λ у ряд Маклорена.

Тому

$$M(X) = \lambda e^{-\lambda} e^\lambda = \lambda.$$

Не розглядаючи висновок зазначимо, що

$$D(X) = \lambda,$$

тобто дисперсія дорівнює математичному очікуванню.

Розглянуті види розподілів випадкової величини, звісно, не вичерпують усіх розподілів. Можна назвати ще кілька: розподіл Бернуллі, експоненційний розподіл, гамма - розподіл, розподіл Вейбула, гіпергеометричні розподіли та ін. За певних умов та параметрів один вид розподілу може переходити до іншого. Тому при вирішенні практичних завдань за законами розподілу випадкових величин слід звертатися до спеціальної літератури.

Поняття статистичної гіпотези та статистичного критерію

Статистичною гіпотезою називають будь-яке твердження про вид або властивості розподілу випадкових величин, що спостерігаються в експерименті. Такі твердження можна робити з урахуванням теоретичних міркувань чи статистичних досліджень інших спостережень. Наприклад, при багаторазовому вимірі деякої фізичної величини, точне значення X якої не відомо, але в процесі вимірів воно змінюється. На результат вимірювань впливають багато випадкових факторів, тому результат i -го вимірювання можна записати у вигляді $a_i = X + e_i$, де e_i – випадкова похибка вимірювання. Якщо e_i складається з великої кількості помилок, кожна з яких не велика, то на підставі центральної граничної теореми можна припустити, що випадкові величини a_i мають нормальний розподіл. Таке припущення є статистичною гіпотезою про вид розподілу випадкової величини, що спостерігається.

Якщо для досліджуваного явища сформульована та чи інша гіпотеза (звичайно її називають основною чи нульовою гіпотезою та позначають символом H_0), то Завдання полягає в тому, щоб сформулювати правило, яке дозволяло б за результатами спостережень прийняти чи відхилити цю гіпотезу. Правило, згідно з яким гіпотеза, що перевіряється H_0 , приймається чи відкидається, називається статистичним критерієм перевірки гіпотези H_0 .

Найбільш поширені такі статистичні гіпотези, як:

- а) виду розподілу;
- б) однорідності кількох серій незалежних результатів;
- в) випадковості результатів експерименту тощо.

Статистичний критерій перевірки гіпотези H_0 слугує для визначення можливого відхилення від основної гіпотези. Характер відхилень може бути різним. Якщо критерій «уловлює» будь-які відхилення від H_0 , то такий критерій називають універсальним чи критерієм згоди. Існують критерії, які виявляють відхилення від заданого виду, це вузько спрямовані критерії.

Вибір правила перевірки гіпотези H_0 еквівалентний завданням критичної області x_1 , при потраплянні в яку змінної x гіпотеза H_0 відкидається. Критерій, що визначається критичною областю x_1 називають критерієм x_1 .

У процесі перевірки гіпотези H_0 можна прийти до правильного рішення або зробити помилку першого роду – відхилити H_0 , коли вона вірна, або помилку другого роду – прийняти H_0 , коли вона хибна. Іншими словами, помилка першого роду має місце, якщо точка x потрапляє у критичну область x_1 , тоді як вірна нульова гіпотеза H_0 , а помилка другого роду – коли $x \in x_0$, але гіпотеза H_0 хибна.

Бажано провести перевірку гіпотези те щоб звести до мінімуму ймовірності обох помилок. Однак при цьому числі випробувань n у загальному випадку неможливо одночасно обидві ці ймовірності зробити як завгодно малими. Тому найбільш раціонально вибирати критичну область наступним чином: при заданій кількості випробувань n встановлюється межа для ймовірності помилки першого роду і при цьому вибирається та критична область x_1 , для якої ймовірність помилки другого роду мінімальна.

Ймовірності помилок першого та другого роду

Розглянемо верстат, який може працювати лише в одному із двох станів. Якщо він працює в налагодженому режимі, то для ознаки якості, що цікавить нас, наприклад, довжини або діаметра заготовки, має місце нормальний розподіл при роботі як в налагодженому так і в розлагодженому режимі. Обидва режими відрізняються лише рівнем налаштування процесу з математичного очікування ($M(x) = 10$ та 11 , відповідно у налагодженому та розлагодженому режимі), тоді як дисперсії в обох випадках становлять $\sigma^2 = 4$.

Перевірити потрібно нульову гіпотезу, відповідно до якої $M(x) = 10$, проти альтернативи (в даному випадку єдиної) $M(x) = 11$. Конкуруючу гіпотезу позначимо H_1 . Тоді $H_0: M(x) = 10$; $H_1: M(x) = 11$.

Необхідно за результатами вибірки визначити в якому стані працює верстат. Прийmemo обсяг вибірки n із потенційно нескінченної генеральної сукупності. Як контрольну величину візьmemo вибіркове середнє X_n .

Для формулювання критерію необхідно розділити область зміни контрольної величини (x) на критичну область відхилення гіпотези H_0 (прийняття H_1) та область прийняття гіпотези H_0 . Для цього необхідно вибрати число K , таке, що $10 < K < 11$, і інтервал $(-\infty; K]$ розглядати як сферу прийняття гіпотези H_0 , а інтервал $[K; \infty)$ – як сферу відхилення гіпотези H_0 . Кожна реалізація X_{25} або X_4 можлива при вірності будь-якій з двох гіпотез, але з різною ймовірністю.

Збільшення n веде до зменшення дисперсії розподілу x і тим самим до одночасного зменшення ймовірностей α і β . Тоді можна записати:

$$\alpha = P(X_n > K | M(x) = 10) = 1 - \Phi\left(\frac{K - 10}{\sigma / \sqrt{n}}\right);$$

$$\beta = P(X_n \leq K | M(x) = 11) = \Phi\left(\frac{K - 11}{\sigma / \sqrt{n}}\right).$$

Ці два рівняння містять чотири величини α , β , K , n . Задавши дві з чотирьох величин, можна визначити дві інші.

Наприклад, при $n = 25$ і $K = 10,4$ визначимо:

$$\alpha = 1 - \Phi\left(\frac{10,4 - 10}{2 / \sqrt{25}}\right) = 1 - \Phi(1) = 0,1516;$$

$$\beta = \Phi\left(\frac{10,4 - 11}{2\sqrt{25}}\right) = \Phi(-1,5) = 1 - \Phi(1,5) = 0,0668.$$

Якщо задатися величинами α і β , то можна визначити величини K , n .

Перевірка гіпотези виду закону розподілу ймовірностей

При перевірці експерименту закон розподілу ймовірностей випадкових величин невідомий і можна лише ймовірно судити про його вид. Вибіркові оцінки параметрів розподілу несуть у собі випадкові помилки, що спотворюють справжній характер розподілу. Тому після отримання емпіричного розподілу проводиться підбір теоретичного закону розподілу, придатного для опису імовірнісних властивостей випадкової величини, що вивчається. Критерії підбору (перевірки гіпотези відповідності) називають у статистиці критеріями згоди. Усі вони засновані на виборі припустимої міри розбіжності між теоретичним розподілом та вибірковими даними.

Загальну процедуру перевірки гіпотези закону розподілу можна подати у наступній послідовності:

1. За дослідними даними будується емпірична крива розподілу ймовірностей;
2. Визначаються параметри емпіричного розподілу (відповідно до його виду);
3. Висувається одна або кілька гіпотез про функцію щільності досліджуваної випадкової величини, виходячи із зовнішнього вигляду емпіричної кривої, значень її параметрів, технічних факторів, що впливають на її вигляд;
4. Емпірична крива вирівнюється по одній або декільком теоретичним кривим;
5. Проводиться порівняння за одним або декількома критеріями згоди;
6. Вибирається теоретична функція, що дає найкраще узгодження.

Пояснимо п. 4; 5. Визначивши за емпіричними даними параметри розподілу, підставляють їх у теоретичну криву закону розподілу та розраховують ймовірність середин інтервалів емпіричного розподілу. Помноживши значення отриманої ймовірності на загальну кількість дослідів, одержують теоретичне значення частот випадкової величини, які визначають \square вирівняну \square криву. Тепер можна знайти ймовірність того, що емпірична крива відповідає обраній теоретичній, обравши ймовірність згоди (рівень значущості). Якщо результат розбіжності не вийде за прийнятий рівень значущості, вважають, що емпіричний розподіл узгоджується з теоретичним. Якщо порівняння здійснюється з декількома теоретичними законами, то остаточно приймати той, який дає кращу відповідність.

Найчастіше як критерії згоди приймають критерій Пірсона (χ^2) та критерій Колмогорова-Смирнова (К-С – критерій).

Критерій χ^2 є найбільш заможним за великої кількості спостережень. Він майже завжди спростовує невірну гіпотезу, забезпечує мінімальну помилку у прийнятті невірної гіпотези порівняно з іншими критеріями.

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^K \frac{(m_j - m_j^*)^2}{m_j^*},$$

де m_j – частота випадкової події, що спостерігається;

m_j^* – очікуване за прийнятим теоретичним законом розподілом;

K – кількість інтервалів випадкової величини.

Потім визначається кількість ступенів свободи l :

$$l = K - r - 1;$$

де K – кількість інтервалів випадкової величини;

r – число параметрів теоретичної функції розподілу.

K - S – критерій найкраще використовувати у разі, якщо теоретичні значення параметрів розподілу відомі. При невідомих параметрах його можна використовувати, але він дає завищені результати. При використанні цього критерію визначається величина

$$D = \frac{\max |m_j^* - m_j^{*i}|}{n},$$

де

m_j^h, m_j^{*h} – відповідно, накопичені спостерігаються та очікувані (теоретичні) частоти;

n – кількість проведених дослідів.

Тобто в даному випадку оцінюється тільки максимальне відхилення накопиченої частоти випадкової події, що виникає в одному з діапазонів зміни випадкової величини. Отримане значення коефіцієнта порівнюється з табличним для числа ступенів свободи досвіду та прийнятого рівня значущості результату. Якщо табличне значення коефіцієнта більше, то гіпотеза про ухвалений закон розподілу не відкидається.

Контрольні питання

1. Сутність безперервної та дискретної випадкової величини;
2. Сутність інтегрального закону розподілу випадкової величини;
3. Сутність диференціального закону розподілу випадкової величини;
4. Зв'язок інтегрального та диференціального законів розподілу;
5. Основні характеристики випадкової величини, заданої своїм розподілом;

6. Назвіть приклади законів розподілу безперервної та дискретної випадкової величини;
7. Поняття статистичної гіпотези та статистичного критерію;
8. Назвіть приклади статистичних гіпотез;
9. Сутність помилок першого та другого роду;
10. Сутність перевірки гіпотези виду закону розподілу;
11. Принципова відмінність за умов Пірсона і Колмогорова - Смирнова.

7. Математичне моделювання та його складові

Дуже часто досліджувана величина змінюється відповідно до зміни умов досвіду чи часу. Мета експерименту в цьому випадку полягає в знаходженні функціональної залежності, яка найкращим чином описує зміну параметра, що нас цікавить.

Слід розуміти, що однозначно відновити (переважно невідому) функціональну залежність між змінними неможливо навіть у тому випадку, якби змінні величини, отримані з досвіду, не мали б помилки виміру. Тим більше не слід очікувати, що це вдасться зробити, маючи експериментальні дані, що містять принаймні випадкові помилки вимірювань.

Тому математична обробка результатів спостережень неспроможна ставити собі завдання розгадати справжній характер залежності між змінними. Вона дозволяє лише уявити результати досвіду у вигляді найпростішої формули.

Залежно від призначення цих формул існують різні методи їх отримання, які відрізняються складністю розрахункових процедур та точністю одержуваних рішень.

Графічний метод обробки результатів

Графічний метод полягає у побудові графіка залежності між досліджуваними величинами з наступним визначенням рівняння залежності між ними.

Графіки будують насамперед у рівномірних шкалах. Якщо характер зв'язку між досліджуваними величинами невідомий, спочатку перевіряють збіг експериментальних точок із заданою кривою. Якщо попередніх відомостей про характер рівняння відсутні, то першим етапом обробки даних є знаходження кривої, що збігається з дослідними точками. Це завдання вирішується шляхом підбору. Можна використовувати еталон - кальку із попередньо викресленим на ній сімейством кривих з різними параметрами. Природно, що масштаб кальки та емпіричної кривої має бути однаковим.

Побудований за досвідченими даними, відрізок кривої може збігатися з великою кількістю різних кривих, що проходять досить близько до дослідних точок. У цьому випадку вибирають криву з найбільш простим та зручним у використанні рівнянням. Іноді емпірична крива може мати перегини або

складатися з окремих яскраво виражених ділянок. Однак при цьому необхідно визначити координати точок переходу від однієї кривої до іншої.

Рівняння залежності між досліджуваними величинами при графічному методі просто визначається тоді, коли емпіричні точки досить добре збігаються із прямою лінією, тобто описуються рівнянням $y = ax + b$, де a , b – коефіцієнти, що підлягають визначенню.

Визначення коефіцієнтів при графічному методі ґрунтується на «способі натягнутої нитки». Нанісши результати експерименту на графік (краще, якщо він виконаний на міліметровці), підбираємо графічну пряму, що найближче підходить до нанесених точок. Вибравши положення прямої, визначаємо дві довільні точки на цій прямій (не обов'язково є точками експерименту), визначаємо їх координати $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$. І для визначення коефіцієнтів a і b отримуємо два прості рівняння

$$ax_1 + b = y_1;$$

$$ax_2 + b = y_2.$$

Пряма проводиться приблизно якомога ближче до експериментальних точок. На прямій обраються точки $M(2; 4)$ і $N(13; 10)$. Коефіцієнт a характеризує кут нахилу прямої.

Тому

$$a = \operatorname{tg}\beta = \frac{y_N - y_M}{x_N - x_M} = \frac{10 - 4}{13 - 2} = \frac{6}{11} \approx 0,55$$

$$b = y_M - ax_M = y_N - ax_N = 4 - 0,55 \cdot 2 = 2,9.$$

Таким чином $y = 0,55x + 2,9$.

Якщо експериментальна залежність має нелінійний характер, то графічним способом у системі координат з рівномірними шкалами визначити коефіцієнти кривої важко. Але досить великий клас нелінійних залежностей шляхом заміни змінних та графічного зображення у функціональних шкалах можна привести до лінійних і далі використовувати спосіб натягнутої нитки.

Функціональні шкали та їх застосування

Нехай функція $y = f(x)$ безперервна та монотонна на деякому проміжку $[a; b]$. Візьмемо вісь OM , на якій будуватиметься шкала, виберемо на ній точку початку відліку O та встановимо масштаб μ . Функціональна шкала будується так.

Розбивши інтервал $[a; b]$ на рівні частини, обчислюємо значення функції $f(x)$ у кожній з точок поділу та відкладемо на осі OM для кожної точки відрізок $\mu f(x)$. Крапка, що виходить при цьому, забезпечується відміткою x ,

тобто відкладається в обраному масштабі значення функції, а пишеться значення аргументу.

Іноді початок шкали поміщають у першу точку відліку, тобто. точку з написом а поєднують з 0. Тоді точка x буде перебувати в кінці відрізка μ $[f(x) - f(a)]$. Отримана шкала дозволяє судити про поведінку функції на ділянці, що розглядається: великі проміжки між відмітками вкажуть, що функція змінюється швидше, ніж там, де ці проміжки малі.

Вибір масштабу μ визначає довжину шкали. Найчастіше надходять навпаки: задаються довжиною шкали l і визначають масштаб.

$$\mu[f(b) - f(a)] = l \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{l}{f(b) - f(a)}$$

приклад. Побудуємо функціональну шкалу для функції $y = x^2$ на ділянці $[1; 2]$. Задамося довжиною шкали $l = 12$ см. Тоді $\mu = \frac{12}{2^2 - 1^2} = 4$ см. Розіб'ємо відрізок $[1; 2]$ на десять рівних частин та обчислимо значення функції у всіх точках поділу. Сумісний початок шкали з точкою відліку $x = 1$. Результати розрахунку зведені в табл. 2.

Таблиця 2

Розрахунок функціональної шкали $y = x^2$

x	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
x^2	1,0	1,21	1,44	1,69	1,96	2,25	2,56	2,89	3,24	3,61	4,00
x^2-1	0	0,21	0,44	0,69	0,96	1,25	1,56	1,89	2,24	2,26	3,00
$4(x^2-1)$	0	0,84	1,76	2,76	3,84	5,00	6,24	7,56	8,94	10,44	12,0

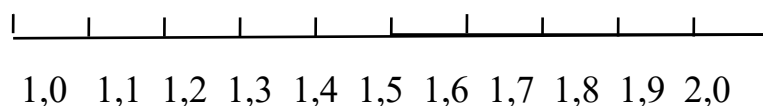


Рис. 1. Функціональна шкала $y = x^2$

За допомогою функціональних шкал графіки багатьох функцій можуть бути перетворені до прямолінійного вигляду.

Наприклад, рівняння параболи $y = x^2$. Якщо на осі ОУ завдати рівномірної шкали, а на осі ОХ₁ шкалу квадратів $x_1 = x^2$, то вийде сітка, де рівняння параболи має зображення прямої лінії ($y = x_1$), що проходить через початок координат.

Особливо часто використовуються різні логарифмічні функції, за допомогою яких можна «випрямляти» графіки статечних та показових функцій. Наприклад, $y = ae^{bx}$; $\lg y = (b \lg e) x + \lg a$. Вважаючи $\lg y = y_1$, $\lg a = A$, $b \lg e = B$, запишемо вихідне рівняння у вигляді $y_1 = A + Bx$, звідки видно, що залишивши рівномірною шкалу x та побудувавши логарифмічну шкалу y_1 ,

можна зобразити вихідне рівняння прямою лінією. Отримана координатна сітка називається напівлогарифмічною.

Очевидно, що такого роду перетворення можливі й у загальному випадку. Будь-яка неявна функція, задана співвідношенням виду

$$a\varphi(x) + b\psi(y) + c = 0,$$

де a , b , c – постійні, зображуватиметься прямою лінією на функціональній сітці, де на осі OX побудована шкала $\varphi(x)$, а на осі OY – шкала функції $\psi(y)$. Звичайно, функції $\varphi(x)$ і $\psi(y)$ повинні задовольняти умови безперервності та монотонності. В табл. 3 наведено перетворення для деяких функцій.

Таблиця 3
Лінеаризація деяких функцій

Вихідна формула	Перетворена формула	Заміна змінних	Лінеаризована формула
$y=ax^b$	$\lg y=b \cdot \lg x+\lg a$	$\lg y=y_1$ $\lg x=x_1$ $\lg a=a_1$	$y_1=bx_1+a_1$
$y=a \cdot \lg x+b$	—	$\lg x=x_1$	$y=ax_1+b$
$y=e^{bx+k}$	$\lg y=b \cdot \lg e \cdot x+k \cdot \lg e$	$\lg y=y_1$ $b \cdot \lg e=a$ $k \cdot \lg e=k_1$	$y_1=ax+k_1$
$y=ae^{bx}$	$\lg y=bx \cdot \lg e+\lg a$	$\lg y=y_1$ $b \cdot \lg e=b_1$ $\lg a=a_1$	$y_1=b_1x+a_1$
$y=\frac{a}{\bar{o}}+b$	—	$\frac{1}{\bar{o}}=\bar{o}_1$	$y=ax_1+b$
$y=\frac{1}{ax+b}$	$\frac{1}{y}=ax+b$	$\frac{1}{y}=y_1$	$y_1=ax+b$
$y=\frac{x}{ax+b}$	$\frac{1}{y}=\frac{b}{x}+a$	$\frac{1}{y}=y_1$ $\frac{1}{x}=x_1$	$y_1=bx_1+a$

Зі сказаного ясна роль функціональних сіток при обробці результатів експерименту. Якщо результати експерименту розташовуються поблизу кривої, то наявною обмеженою ділянці кривої важко судити, якого типу функцією її найкраще наближати. Перевівши отримані експериментальні дані на функціональні сітки можна оцінити на якій з них ці дані ближче підходять до прямої і, отже, якою функцією найкраще описуються.

Аналітичні методи обробки результатів

Графічний метод обробки результатів має наочність, відносну простоту, проте його результати містять певну суб'єктивність і відносно низьку точність.

Аналітичні методи позбавлені певною мірою зазначених недоліків і дозволяють отримати результат для більш широкого класу функцій з більшою точністю, ніж графічний метод.

Існують різні аналітичні методи одержання параметрів емпіричних кривих залежно від критерію, прийнятого при отриманні. Розглянемо деякі з існуючих способів.

Спосіб середньої

Припустимо, що є n поєднань x_i, y_i , отриманих під час експерименту. Навіть у тому випадку, якщо між x і y теоретично встановлено функціональний зв'язок (у даному випадку припустимо, що лінійний), то значення, що спостерігаються y_i будуть відрізнятися від $ax_i + b$ внаслідок наявності експериментальних помилок. Позначимо через Δ_i відповідну помилку

$$\Delta_i = y_i - ax_i - b \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Якщо вибирати параметри a і b те щоб всіх n спостережень помилки врівноважувалися, тобто $\sum_{i=1}^n \Delta_i = 0$, то це призвело б нас до одного рівняння,

тоді як для знаходження двох коефіцієнтів (a, b) їх потрібно два. Тому припустимо, що врівноважування відбувається як для всіх проведених спостережень загалом, але й кожної групи, що містить половину (чи майже половину) всіх спостережень окремо.

У цьому випадку можна дійти до системи рівнянь

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m (y_i - ax_i - b) = 0 \\ \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b) = 0 \end{cases},$$

де m – кількість спостережень у першій групі.

Цю систему рівнянь запишемо тепер у вигляді

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^m x_i + mb = \sum_{i=1}^m y_i \\ a \sum_{i=m+1}^n x_i + (n-m)b = \sum_{i=m+1}^n y_i \end{cases}.$$

Викладене показує, що метод середніх «урівноважує» позитивні та негативні відхилення теоретичної кривої від експериментальних значень.

приклад. Визначимо коефіцієнти a , b методом середньої. Для цього сім вимірів розділимо на дві групи $m = 3$ перших значень, $n = 4$ наступних

$$\sum_{i=1}^3 x_i = 0,5 + 3,7 + 5,8 = 10,0;$$

$$\sum_{i=4}^7 x_i = 7,7 + 9,8 + 11,9 + 13 = 42,4;$$

$$\sum_{i=1}^3 y_i = 3,5 + 5,2 + 5,8 = 14,5;$$

$$\sum_{i=4}^7 y_i = 7,2 + 7,9 + 8,9 + 10,4 = 34,4.$$

Одержимо систему

$$\begin{cases} 10a + 3b = 14,5 \\ 42,4a + 4b = 34,4 \end{cases}$$

Вирішуючи систему, знаходимо

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 14,5 & 3 \\ 34,4 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10 & 3 \\ 42,4 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{14,5 \cdot 4 - 35,4 \cdot 3}{10 \cdot 4 - 42,4 \cdot 3} = \frac{48,2}{87,2} = 0,55;$$
$$b = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 14,5 \\ 42,4 & 34,4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10 & 3 \\ 42,4 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{344 - 614,8}{-87,2} = \frac{270,8}{87,2} = 3,11.$$

Таким чином, спосіб середньої дає пряму

$$y = 0,55x + 3,11.$$

Порівняно з графічним способом коефіцієнти a збігаються і є різниця в коефіцієнті b .

Метод найменших квадратів

У методі середніх щодо коефіцієнтів рівняння використовувалося умова рівності нулю алгебраїчної суми відхилень результатів експерименту від

теоретичної кривої (у разі прямої). Очевидно, що при цьому Δ_i може бути значної величини. Має значення тільки «урівноважування» позитивних та негативних відхилень.

Поставимо тепер завдання знаходження за результатами спостережень найімовірніші значення невідомих коефіцієнтів.

Припустимо, що шукана залежність $y = f(x)$ існує. Тоді параметри цієї лінії необхідно вибрати таким чином, щоб точки y_i розташовувалися по обидва боки кривої $y = f(x)$ якомога ближче до останньої. Припустимо, що розкид точок y_i відносно $y = f(x)$ підпорядковується закону нормального розподілу. Тоді мірою розкиду є дисперсія σ^2 або її наближений вираз – середній квадрат відхилень.

$$S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [y_i - f(x_i)]^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\Delta y_i)^2.$$

І вимога мінімального розкиду буде задоволена, якщо мінімізувати вираз $(\Delta y_i)^2$. Як відомо, необхідною умовою того, що функція набуває мінімального значення, є те, що її перша похідна (або приватні похідні для багатьох змінних) дорівнює нулю. Застосування методу найменших квадратів має сенс, якщо число експериментальних точок n більше від числа визначених коефіцієнтів.

Розглянемо реалізацію методу найменших квадратів стосовно рівняння виду $y = ax + b$.

Для знаходження коефіцієнтів a , b шуканої прямої необхідно мінімізувати суму квадратів відстаней Δy_i по ординаті від точки $(x_i; y_i)$ до прямої. Відстань Δy_i визначається

$$\Delta y_i = y_i - ax_i - b.$$

Для мінімізації $\sum_{i=1}^n \Delta y_i^2$ прирівнюємо до нуля похідні цієї суми за параметрами a , b :

$$\frac{\partial}{\partial a} = \left[\sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2 \right]' = 2 \sum (y_i - ax_i - b)(-x_i) = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial b} = \left[\sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2 \right]' = 2 \sum (y_i - ax_i - b)(-1) = 0.$$

Перетворимо цю систему

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n y_i x_i = 0 \\ a \sum_{i=1}^n x_i + bn - \sum_{i=1}^n y_i = 0 \end{cases}$$

Отримаємо систему нормальних рівнянь методу найменших квадратів.
Вирішуючи її відносно a , b отримуємо:

$$a = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} ; \quad b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} .$$

Обчислюючи з n дослідів необхідні суми та роблячи зазначені дії, отримуємо величину коефіцієнтів a , b .

Як видно, спосіб найменших квадратів досить громіздкий і за його застосування широко використовується обчислювальна техніка. Метод найменших квадратів може використовуватись і у разі нелінійних функцій. Наприклад, якщо визначаються параметри квадратичної залежності:

$$y = ax^2 + bx + c,$$

то

$$\sum_{i=1}^n (\Delta y_i)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i^2 - bx_i - c)^2 = \min .$$

Диференціюючи це співвідношення a , b , c з отримуємо систему нормальних рівнянь:

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i + nc - \sum_{i=1}^n y_i = 0 \\ a \sum_{i=1}^n x_i^3 + b \sum_{i=1}^n x_i^2 + c \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n x_i y_i = 0 \\ a \sum_{i=1}^n x_i^4 + b \sum_{i=1}^n x_i^3 + c \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i = 0 \end{cases}$$

З цієї системи можна визначити параметри a , b , c .

При використанні методу найменших квадратів при інших нелінійностях зручніше лінеаризувати вихідні залежності.

В табл. 4 наведено системи нормальних рівнянь для деяких вихідних рівнянь.

Таблиця 4
Системи нормальних рівнянь

Вихідне рівняння	Система нормальних рівнянь
$y = ax^b$	$\begin{cases} b \sum (\lg x)^2 + a \sum \lg x - \sum (\lg x \lg y) = 0 \\ b \sum \lg x + an - \sum \lg y = 0 \end{cases}$
$y = a \cdot \lg x + b$	$\begin{cases} a \sum (\lg x)^2 + b \sum \lg x - \sum (y \lg x) = 0 \\ a \sum \lg x + bn - \sum y = 0 \end{cases}$
$y = e^{ax+b}$	$\begin{cases} a \lg e \sum x^2 + b \lg e \sum x - \sum (x \lg y) = 0 \\ a \lg e \sum x + n b \lg e - \sum \lg y = 0 \end{cases}$
$y = ae^{bx}$	$\begin{cases} b \lg e \sum x^2 + \lg a \sum x - \sum (x \lg y) = 0 \\ b \lg e \sum x + n \lg a - \sum \lg y = 0 \end{cases}$
$y = \frac{a}{x} + b$	$\begin{cases} a \sum \frac{1}{x^2} + b \sum \frac{1}{x} - \sum \frac{y}{x} = 0 \\ a \sum \frac{1}{x} + bn - \sum y = 0 \end{cases}$
$y = \frac{1}{ax + b}$	$\begin{cases} a \sum x^2 + b \sum x - \sum \frac{x}{y} = 0 \\ a \sum x + bn - \sum \frac{1}{y} = 0 \end{cases}$
$y = \frac{\delta}{ax + b}$	$\begin{cases} a \sum \frac{1}{x^2} + b \sum \frac{1}{x} - \sum \frac{1}{xy} = 0 \\ a \sum \frac{1}{x} + bn - \sum \frac{1}{y} = 0 \end{cases}$

Примітки: 1. Величини x , y позначають значення величин x_i , y_i у i -му досліді;

2. Знак Σ позначають суму величин від $i = 1$ до $i = n$, де n – число рівноточних вимірів.

Інтерполяція функцій

$$F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

складемо систему рівнянь

$$\begin{cases} \dot{a}_0 + \dot{a}_1 \cdot 0 + \dot{a}_2 \cdot 0^2 = 1 \\ \dot{a}_0 + \dot{a}_1 \cdot 1 + \dot{a}_2 \cdot 1^2 = 1 \\ \dot{a}_0 + \dot{a}_1 \cdot 2 + \dot{a}_2 \cdot 2^2 = 3 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} \dot{a}_0 = 1 \\ \dot{a}_0 + \dot{a}_1 + \dot{a}_2 = 1 \\ \dot{a}_0 + 2\dot{a}_1 + 4\dot{a}_2 = 3 \end{cases}$$

звідки $a_0 = 1$, $a_1 = -1$, $a_2 = 1$ і інтерполюючий многочлен має вигляд

$$F(x) = 1 - x + x^2.$$

Тепер розглянемо загальний підхід до пошуку інтерполяційного багаточлена $F(x)$, не рішенням системи, а безпосереднім записом.

Визначимо вираз для многочлена, який приймає в точці $x = x_0$ значення $y_0 = 1$, а в точках $x = x_1, x_2, \dots, x_n$ – значення $y_1 = y_2 = \dots = y_n = 0$. Вочевидь, що многочлен матиме вигляд

$$\frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n)}.$$

Тут при $x = x_0$ вочевидь, що многочлен матиме вигляд, а при $x = x_1, x_2, \dots, x_n$ – чисельник дорівнює нулю.

Тепер побудуємо многочлен $F_0(x)$, що приймає у точці x_0 значення y_0 і що обертається в нуль для значень $x = x_1, x_2, \dots, x_n$. З огляду на попередню побудову можна записати

$$F_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n)} \cdot y_0.$$

Тепер можна записати многочлен $F(x)$ для довільного значення x_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$), що приймає значення $F(x_i) = y_i$, а у всіх інших точках $x \neq x_i$ значення, що дорівнює нулю

$$F_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)} \cdot y_i$$

Як видно з запису, чисельник не міститиме виразу $(x - x_i)$, а знаменник $-(x_i - x_i)$, тобто виразів, що обертають чисельник і знаменник у нуль.

Шуканий многочлен буде дорівнювати сумі

$$F(x) = \sum_{i=0}^n F_i(x),$$

тобто знову в кожній точці x_i один із доданків приймає потрібне значення y_i , а всі інші звертаються в нуль.

У розгорнутому вигляді

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{i=0}^n \frac{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)} y_i = \\ &= \frac{(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\dots(x_0 - x_n)} y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)\dots(x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\dots(x_1 - x_n)} y_1 + \dots \\ &\dots + \frac{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)\dots(x_n - x_{n-1})} y_n. \end{aligned}$$

Отримана формула називається інтерполяційною формулою Лагранжа.

Використовуючи формулу Лагранжа, запишемо багаточлен $F(x)$ для розібраного вище прикладу.

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{(x - 1)(x - 2)}{(0 - 1)(0 - 2)} 1 + \frac{(x - 0)(x - 2)}{(1 - 0)(1 - 2)} 1 + \frac{(x - 0)(x - 1)}{(2 - 0)(2 - 1)} 3 = \\ &= \frac{\tilde{o}^2 - 2\tilde{o} - \tilde{o} + 2}{2} - \frac{\tilde{o}^2 - 2\tilde{o}}{1} + \frac{\tilde{o}^2 - \tilde{o}}{2} 3 = \\ &= \frac{\tilde{o}^2 - 3\tilde{o} + 2 - 2\tilde{o}^2 + 4\tilde{o} + 3\tilde{o}^2 - 3\tilde{o}}{2} = \frac{2\tilde{o}^2 - 2\tilde{o} + 2}{2} = \tilde{o}^2 - \tilde{o} + 1. \end{aligned}$$

Отримали теж вираз, що й раніше.

Контрольні питання

1. Призначення графічного способу обробки результатів;
2. Сутність графічного методу обробки результатів;
3. Поняття та призначення функціональної шкали;
4. Вибір масштабу функціональної шкали;

5. Сутність апроксимації методом середніх;
6. Сутність апроксимації методом найменших квадратів;
7. Принципова відмінність методу інтерполювання від методу найменших квадратів.

ОСНОВИ НОМОГРАФІЇ

Номографія – слово грецьке. Номос – закон, графо – пишу, креслю. У буквальному перекладі це слово означає «креслення закону».

Своїм завданням номографія ставить побудову спеціальних графіків – номограм, що служать для розв'язання різних рівнянь. Номограми дають можливість компактно представляти функції багатьох змінних та таблиці з кількома входами. На номограмах можна вирішувати деякі трансцендентні рівняння та системи таких рівнянь. Номограми можна застосовувати не тільки для обчислювальних цілей, але і для дослідження покладених в їх основу функціональних залежностей.

Наочність уявлення різних закономірностей та простота використання номограм за досить високої точності результату забезпечують широке використання номограм у різних галузях техніки.

В основі номограм лежить поняття функціональної шкали (див. вище). На основі функціональних шкал створюються не тільки номограми, а й різні обчислювальні засоби: універсальні обчислювальні номограми, логарифмічні лінійки тощо.

Розглянемо один із можливих видів номограм – номограми в декартовій системі координат, що мають досить широке використання в машинобудуванні.

Номограми в системі декартової координат

Вище описано процедуру побудови графіків для функції одного змінного. При цьому на графіку виходить одна лінія (пряма чи крива).

Якщо ж функція, що досліджується, залежить від двох змінних

$$Z = f(x, y),$$

то надаючи у цьому рівнянні, наприклад, параметру у ряд приватних (постійних) значень y_1, y_2, \dots, y_n можна, як і для функції одного змінного, збудувати залежності

$$Z = f(x, y_1);$$

$$Z = f(x, y_2);$$

.....

$$Z = f(x, y_n).$$

Отримаємо систему кривих (в окремому випадку прямих), званих номограмою з «помічених» ліній, т.к. кожна лінія позначається відповідним значенням u_i .

Приклад. При дослідженні процесу фрезерування було встановлено, що найбільш доцільно величину радіального биття суміжних зубів призначати фрези за умовою забезпечення участі в процесі різання всіх зубів фрези. Аналітично ця умова виражається рівнянням

$$S_z = \frac{k\Delta}{2\sqrt{k-1}},$$

де S_z – розрахункова величина подачі на зуб, мм/зуб;

$$k = \frac{D}{t} \text{ – параметр операції;}$$

D – діаметр фрези, мм;

t – глибина різання, мм;

Δ – величина биття суміжних зубів фрези, мм.

Як видно, $S_z = f(k, \Delta)$ є функцією двох параметрів. Тут можна відзначити, що фактично $S_z = f(D, t, \Delta)$, тобто функцією трьох параметрів, але два параметри (D, t) замінені одним – $k = \frac{D}{t}$, легко визначеним і зменшуючим кількість змінних. Цей прийом широко використовується в номографії.

Тепер необхідно визначитися з осями та позначеним параметром. Як осі ординат, відповідно до функціональної залежності, раціонально прийняти S_z . Як осі абсцис можна прийняти або k , або Δ . Якщо як осі ординат прийняти k (а поміченим параметром Δ_i), то залежність

$$S_z = f(k, \Delta_i)$$

виходитиме криволінійною, відповідно до закономірності $\frac{k}{2\sqrt{k-1}}$.

Простіше будувати і використовувати прямолінійні графіки при рівномірних шкалах. Тому намагаються номограми будувати з урахуванням прямих ліній. Тому краще будуватиме номограму з позначених ліній виду

$$S_z = f(\Delta, K_i),$$

$$\text{де } K_i = \frac{k_i}{2\sqrt{k_i-1}}.$$

Тепер вибираємо масштаб побудови та діапазони зміни змінних. З урахуванням умов процесу фрезерування приймаємо $\Delta \leq 0,08$ мм; $S_z \leq 0,20$

мм/зуб. Параметр k змінюємо дискретно $k = 2; 5; 10; 20; 30; 40; 50$. Так як залежність $S_z = f(\Delta, K_i)$ є прямою лінією, що проходить через початок координат, то для побудови графіків достатньо обчислити лише одне значення S_z при будь-якому значенні Δ . Наприклад, для $k = 2$, при $\Delta = 0,06$ мм маємо

$$S_z = \frac{2 \cdot 0,06}{2\sqrt{2-1}} = 0,06 \text{ (мм/зуб)}.$$

Тепер через точки $(0; 0)$ та $(0,06; 0,06)$ можна провести пряму лінію та позначити її параметр $k = 2$. Аналогічно проводяться та інші лінії. На номограмі наноситься лінія, що показує порядок її використання.

Складові номограми з позначеними лініями

Номограму однієї чверті можна побудувати функції двох змінних. За більшої кількості змінних це вже не можна. І тут використовують складові номограми. Ідею побудови розглянемо спочатку у загальному вигляді.

Нехай нам дано рівняння у неявному вигляді з чотирма змінними

$$f(x, y, z, \eta) = 0.$$

Припустимо, що його можна привести до вигляду

$$f_1(x, y) = f_2(z, \eta),$$

тобто можна поділити змінні. Покладемо

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= \gamma; \\ f_2(z, \eta) &= \gamma. \end{aligned}$$

Ми отримаємо два рівняння, що залежать від двох змінних. Кожне із цих рівнянь можна номографувати, як описано вище. Забезпечивши відлік величини γ на однаковій функціональній шкалі можна обійтися і без чисельних значень γ (якщо вони нас не цікавлять за умов вирішуваного завдання).

Аналогічно поступають і з рівняннями з великою кількістю змінних, що призводитиме до збільшення числа загальних шкал і більшого числа чвертей побудови номограми. Потрібно лише мати на увазі, що не всяке рівняння допускає розкладання на кілька рівнянь із двома змінними і, отже, не всяке рівняння вдається в такий спосіб номографувати.

Розглянемо реальний приклад побудови складової номограми.

При дослідженні процесу фрезерування було встановлено, що сила різання при фрезеруванні вузьких поверхонь набуває характеру повторюваних імпульсів не гармонійної форми. І обурення технологічної системи

здійснюється не на одній, а в безкінечному діапазоні частот. Найбільш небезпечним є вплив перших трьох гармонік, що несуть значно більше енергії обурення, ніж усі інші. Розподіл енергії за цими трьома гармоніками здійснюється в залежності від відношення фронтів наростання і спаду сили в імпульсі. Це відношення можна характеризувати ставленням кутів контакту фрези (φ) та зубу фрези (ψ) із заготівкою. Причому завжди $\varphi \geq \psi$.

Для наочного уявлення та визначення характеру розподілу енергії за трьома гармоніками залежно від умов операції побудуємо номограму.

В одній із чвертей спочатку відображається характер розподілу енергії за гармоніками обурення залежно від φ/ψ . Ці залежності побудовані з результатів досліджень, які тут не відображаються. Коефіцієнт X_2 характеризує "питому вагу" енергії даної гармоніки в загальному силовому обуренні. Діапазон $\varphi/\psi = 1 \dots 9$.

Тепер відношення φ/ψ розкриваємо у параметрах інструменту та операції

$$\frac{\varphi}{\psi} = \frac{\arccos\left(1 - \frac{2t}{D}\right)}{\frac{2B}{D} \operatorname{tg}\omega}$$

Видно, що тут чотири змінні величини: D , t , B , ω .

Введемо проміжну вісь C і побудуємо номограму із позначених ліній для однієї зі змінних величин, а саме B_i

$$C = 2B_i \frac{\varphi}{\psi}$$

Видно, що це рівняння прямих ліній, що проходять через початок координат. Задаючись одним значенням φ/ψ і B_i можна провести її графік. Наприклад, при $\varphi/\psi = 5$, $B_i = 5$ одержимо $C = 2 \cdot 5 \cdot 5 = 50$. Аналогічно чинимо для $B_i = 10$; 15 ; 20 .

Далі вводимо наступну проміжну вісь (i відповідно змінну) $L = C \cdot \operatorname{tg} \omega_i$. Задаючись величинами кута ω_i і C можна визначити становище позначених ліній. Наприклад, при $\omega = 45^\circ$, $C = 50$

$L = 50 \cdot \operatorname{tg} 45^\circ = 50$. Аналогічно чинимо і для інших кутів $\omega_i = 15^\circ$; 30° ; 60° ; 75° . Проводимо прямі лінії через початок системи координат і позначаємо значення кута ω_i кожної лінії.

Таким чином залишився один взаємозв'язок параметрів

$$L = D \cdot \arccos\left(1 - \frac{2t}{D}\right) \frac{2\pi}{360^\circ}$$

Тут необхідно визначитися з параметром, спрямованим по осі та «поміченим» параметром. У будь-якому разі залежність нелінійна. Крім того, глибина різання є параметром, що задається, і його краще взяти в якості «поміченого» параметра. Для побудови позначених ліній потрібно визначити декілька координат кожної лінії.

Розглянемо «помічену» лінію $t = 5$ мм. Як змінний параметр приймаємо діаметр фрези D . При $D = 25; 50; 100; 150; 200$ мм відповідно маємо

$$L_1 = 25 \cdot \arccos\left(1 - \frac{2 \cdot 5}{25}\right) \cdot \frac{2 \cdot 3,14}{360} = 22,6$$

$$L_2 = 50 \cdot \arccos\left(1 - \frac{2 \cdot 5}{50}\right) \cdot 0,017 = 31,3$$

$$L_3 = 100 \cdot \arccos\left(1 - \frac{2 \cdot 5}{100}\right) \cdot 0,017 = 43,9$$

$$L_4 = 150 \cdot \arccos\left(1 - \frac{2 \cdot 5}{150}\right) \cdot 0,017 = 53,7$$

$$L_5 = 200 \cdot \arccos\left(1 - \frac{2 \cdot 5}{200}\right) \cdot 0,017 = 61,9$$

За знайденими точками будується лінія для $t = 5$ мм. Аналогічно надходять і для інших значень t .

Отримана номограма свідчить про те, що розподіл енергії за гармоніками обурення технологічної системи визначається умовами операції, змінюючи які можна впливати на обурення технологічної системи..

Для виключення резонансних явищ необхідно знати спектр власних частот системи та узгоджувати умови операції з їх значеннями, зменшуючи кількість енергії на «резонансній» частоті. Ці дані, зазвичай, відсутні. Тому, використовуючи номограму, можна скоригувати умови операції. Для цього за відомими параметрами фрези, яка показала незадовільні результати, та елементам режиму різання необхідно визначити розподіл енергії за гармоніками обурення та вибрати інший розподіл. Так як глибину різання і ширину фрезерування змінювати, як правило, неможливо, а зміна кута нахилу ріжучої кромки часто недоцільно за умовами стійкості інструменту, новий розподіл енергії можна отримати змінивши діаметр фрези (у більшу або меншу сторону в порівнянні з початковим). У цьому необхідно зберегти колишнім відносне число зубів (z/D) і швидкість різання, оскільки число обертів і зубів фрези відіграють самостійну роль визначенні частотного діапазону обурення (inz). Номограма може суттєво допомагати в управлінні процесом різання, на основі закладених у неї функціональних залежностей.

Література

1. Павленко П. М. и др. Математичне моделювання систем і процесів. – 2017.
2. Winsberg E. Simulations, models, and theories: Complex physical systems and their representations //Philosophy of science. – 2001. – Т. 68. – №. S3. – С. S442-S454.
3. Хазіна С. А. Комп'ютерне моделювання фізичного процесу у різних програмних середовищах. – 2008.
4. Базурін В. М. Вибір програмних засобів для створення моделей фізичних процесів і явищ //Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики: збірник наукових праць.—Вип. ІХ.—Кривий Ріг: Видавничий відділ НМетАУ. – 2011. – С. 225-230.
5. Tarasov V. E. Review of some promising fractional physical models //International Journal of Modern Physics B. – 2013. – Т. 27. – №. 09. – С. 1330005.
6. Cannon R. H. Dynamics of physical systems. – Courier Corporation, 2003.
7. Артюх О. М. и др. Навчальний посібник з дисципліни" Дослідження та випробування технічних систем". – 2021.